

ESSAI

sur le rôle du temps en analyse mathématique
classique

Thèse

*présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de docteur ès sciences*

par

JEAN-BLAISE GRIZE

licencié ès sciences mathématiques

Imprimerie Nouvelle L.-A. Monnier, Neuchâtel

1954

ESSAI

sur le rôle du temps en analyse mathématique classique

Imprimé en Suisse

UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL - FACULTÉ DES SCIENCES

ESSAI

sur le rôle du temps en analyse mathématique classique

Thèse

*présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Neuchâtel
pour obtenir le grade de docteur ès sciences*

par

JEAN-BLAISE GRIZE

licencié ès sciences mathématiques

Imprimerie Nouvelle L.-A. Monnier, Neuchâtel

1954



UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

Faculté des Sciences

La Faculté des sciences de l'Université de Neuchâtel, sur le rapport de messieurs les professeurs FIALA, MULLER et GAGNEBIN, autorise l'impression de la présente thèse sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont contenues.

Neuchâtel, 7 juillet 1954.

Le Doyen :

Prof. Dr Robert CHABLE.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555008_0030

A LA MÉMOIRE DE MA MÈRE

A LA MÉMOIRE DE JEAN DE LA HARPE

L'idée de cette étude m'avait été suggérée par le professeur Jean de la Harpe, décédé en 1947, et auquel je me fais un devoir de rendre hommage.

Monsieur le professeur Félix Fiala a bien voulu consentir à diriger et à encourager mes recherches. Je tiens à lui exprimer ici ma reconnaissance pour toute l'aide qu'il n'a cessé de m'apporter. Ma gratitude va aussi à Messieurs les professeurs Muller et Gagnebin pour l'intérêt qu'ils m'ont témoigné et pour les précieux conseils qu'ils m'ont donnés.

Neuchâtel, janvier 1954.

Jean-Blaise Grize.

ESSAI

sur le rôle du temps en analyse mathématique classique

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

1. Exemple liminaire

On est frappé, à la lecture de certains textes d'analyse, par de brusques changements de style que rien ne semble d'abord justifier. En voici un exemple tiré du *Cours d'analyse mathématique* de E. Goursat :

Limite d'une variable. « On dit qu'un nombre variable x a pour limite un nombre fixe a , ou tend vers a , lorsque la valeur absolue de la différence $x - a$ finit par devenir et rester plus petite que tout nombre positif donné à l'avance. » ¹

Continuité d'une fonction. « Une fonction $f(x)$ est continue pour $x = x_0$, si à tout nombre positif ε , aussi petit qu'on le suppose, on peut faire correspondre un autre nombre positif η tel que l'on ait

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

pour toute valeur de h moindre que η en valeur absolue. » ²

Ces deux citations expriment des idées très proches l'une de l'autre, elles sont tirées d'un même chapitre, et cependant elles sonnent diversement. La différence provient manifestement du vocabulaire utilisé. Dans le second texte, on est en présence de termes techniques et abstraits dont le sens peut être trouvé dans le corps de l'ouvrage et il serait même assez facile de les traduire dans un symbolisme logique. Il en est tout

¹ et ² *Op. cit.*, p. 1 et p. 7.

autrement dans le premier texte. Des mots comme « finir », « devenir », « rester », « à l'avance » semblent emprunter davantage à l'expérience quotidienne qu'aux concepts des mathématiques et c'est en vain qu'on en chercherait une définition à l'intérieur des traités d'analyse.

Si la chose était exceptionnelle ou même si elle n'apparaissait que dans des ouvrages de vulgarisation, dans des textes dont on pourrait penser qu'ils ne constituent que des introductions, nous n'aurions pas songé à y attacher de l'importance. Mais nous avons pu constater que tel n'était pas le cas. Des auteurs qui passent pour être rigoureux, dans des ouvrages où ils attachent une grande importance à la forme, font encore assez souvent usage d'expressions du genre de celles que nous venons de citer.

Le phénomène ne se limite d'ailleurs pas à l'analyse mathématique et s'explique facilement. L'auteur d'un traité quelconque a en effet une tâche assez précise qui consiste à transmettre un certain contenu de pensée. Pour cela il supposera que son lecteur possède déjà une certaine information, sinon du sujet qu'il va exposer, du moins de quelque autre plus ou moins proche. Cela fait qu'il utilisera certainement des mots, des idées et même des images dont il faut chercher le sens hors de la théorie actuellement exposée. Et même parmi ces images et ces notions il s'en trouvera quelques-unes dont on peut admettre que, dans un certain état de civilisation, elles appartiennent à chacun.

Nous avons été frappé tout particulièrement, comme le montrent nos deux citations, par celles qui relevaient du temps. Et ceci pour deux raisons :

1. D'une part nous avons pu constater que la notion de temps s'était montrée extraordinairement fertile à plusieurs moments de l'histoire de l'analyse ¹.

2. D'autre part nous avons pu déceler simultanément un effort constant pour éliminer le temps, pour s'en passer, quitte à remplacer par des images spatiales ce qui ne pouvait s'exprimer aisément sans aucune image ².

Un tel souci d'atemporalité, rapproché de l'accusation d'irrationalité que Meyerson avait formulée contre le temps ³, rapproché aussi de cette thèse de Bergson que la raison, portant sur le monde des choses, doit nécessairement s'exprimer en un langage spatial ⁴, nous a conduit à étudier la question de plus près. Nous nous sommes proposé de mettre ce rôle en évidence, de le préciser, de faire voir par quelles autres notions le temps pouvait être remplacé et, si possible, de saisir les raisons de son élimination.

¹ Cf. Ch. II.

² Cf. Ch. V, entre autre n° 2.

³ Cf. Ch. X, 4.

⁴ *L'évolution créatrice*.

Ces deux dernières démarches exigeaient que nous nous limitions à des auteurs qui souhaitaient faire disparaître les intuitions temporelles. C'est ce qui explique que, à part quelques rapides allusions qui nous servent de contre-exemples, nous n'ayons pas étudié le mouvement intuitioniste. Et en effet, notre effort a porté sur des exposés où, en principe, le temps n'est pas reconnu comme un élément de base, sur ce que nous nommons des traités « classiques ».

2. Sens du mot « temps »

Avant de commencer les analyses qui nous permettront de répondre aux questions ci-dessus, il faudrait pouvoir définir ce qu'est le temps, ou savoir tout au moins à quels signes on en reconnaît la présence dans l'expression d'une pensée. Sans doute faudrait-il aussi s'entendre sur ce qu'on nomme « l'analyse mathématique ». Mais cette expression est suffisamment claire pour que, quiconque s'est occupé de mathématiques sache, avec une suffisante précision pour notre objet, de quoi il s'agit. Reste donc seulement la notion de temps qui se montre malheureusement fort délicate à saisir.

Un dictionnaire de la langue, celui de l'*Académie* par exemple, ne sert pas à grand'chose. Il définit le temps comme « la durée des choses » et la durée comme « l'espace de temps pendant lequel une chose dure ». Un dictionnaire technique, celui de la *Société française de philosophie*, est déjà plus précis. Il distingue trois sens :

A. Période qui va d'un événement antérieur à un événement postérieur.

B. Changement continu par lequel le passé devient le présent.

C. Milieu indéfini dans lequel se déroulent les événements, chacun y marquant une date¹.

Mais les renseignements fournis constituent de nouveau un cercle. Les notions d'antérieur et de postérieur, de présent et de passé, de déroulement et de date supposent toutes le temps.

D'un autre côté l'examen direct des textes, où les philosophes les plus éminents ont parlé du temps, laisse une impression de diversité telle qu'il paraît impossible d'en tirer une définition unique. En effet, J. Sivadjian, dans l'ouvrage où il passe en revue les principales acceptions du mot « temps »², a montré que le temps avait été considéré tour à tour comme

- une apparence sans réalité objective (les atomistes grecs),
- la sphère du monde elle-même (les Pythagoriciens),
- la durée du monde (Descartes, Newton),
- une loi des phénomènes (Aristote, Leibniz),

¹ Article *Temps*.

² *Le Temps, Etude philosophique, physiologique et psychologique*.

- une forme de la conscience (Kant, Hegel, Berkeley),
- une formation de la conscience (Condillac, Spencer, Janet),
- la durée consciente même (Bergson).

Enfin dans les sciences elles-mêmes la notion de temps est définie de façons très diverses. En voici trois exemples :

1. *Mécanique classique*. Dans leur « *Précis de mécanique rationnelle* », P. Appell et S. Dautheville définissent la dynamique comme la science qui permet de résoudre le problème suivant : « Sachant quelles sont les fonctions $f(t)$ qui se produisent dans certaines conditions données, prévoir quelles sont les fonctions qui se produiraient dans d'autres conditions données. » Ils représentent ensuite les fonctions $f(t)$ par des courbes qu'ils nomment *trajectoires* d'un point et ils appellent les dérivées $f'(t)$, $f''(t)$ respectivement *vitesse* et *accélération* du point, tandis que la variable continue t est nommée le *temps*¹.

2. *Physique moderne*. Dans « *Les nouvelles bases philosophiques de la science* », J. Jeans expose comment Heisenberg chercha à représenter les sauts des électrons d'une couche à l'autre de l'atome de Bohr, sans s'autoriser d'hypothèses non observables². Il montre alors que l'électron est suffisamment connu par deux grandeurs p et q , déterminables effectivement à une certaine approximation près δp et δq , et telles que $\delta p \cdot \delta q \geq h$, h étant la constante de Planck. Or, « dans le cas-limite des atomes de très grandes dimensions, on peut... considérer p et q comme les coordonnées et la quantité de mouvement d'un électron ponctuel »³. Ainsi s'introduit, par la quantité de mouvement, une certaine grandeur t , qu'on nomme encore temps, mais qui est ici une variable discontinue.

3. *Géologie*. Michel Souriau, dans son livre sur *Le temps*, explique ainsi ce qu'est le temps en géologie : « Il faut l'imaginer, en première approximation, comme la verticale ordonnant les étages stratigraphiques. »⁴

On pourrait être tenté de conclure de ce qui précède à un échec des tentatives faites pour préciser la notion de temps. Nous ne pensons pas toutefois que cette hypothèse soutienne l'examen. Il nous paraît en effet inadmissible de penser qu'une réflexion qui s'étend de Pythagore à Jeans, réflexion due aux esprits les plus profonds et les mieux exercés, soit continuellement restée en dehors de la question. Il est plus plausible de voir dans cette pluralité d'opinions une manifestation essentielle de la nature même du temps et qui se traduirait, non dans l'impossibilité de la saisir, mais dans la nécessité de l'envisager avec son contexte. Il est clair en effet que les différents auteurs auxquels il a été fait allusion ne demandaient pas au temps le même service. Celui-ci, ayant des fonctions différentes à remplir, a pris des aspects différents.

Nous sommes ainsi conduit à voir dans le temps une *notion fonctionnelle*, indéfinissable isolément, mais dont il est possible de dire à quelles occasions elle se manifeste.

Nous allons donc renoncer à définir le temps et nous contenter de marquer trois groupes de questions où il joue un rôle.

¹ *Op. cit.*, p. 103.

² et ³ *Op. cit.*, pp. 177-197 et p. 192.

⁴ *Op. cit.*, p. 16.

a. *Le temps est lié au changement et en particulier au mouvement.*

Cette liaison du temps avec le changement paraît être l'une des plus primitives. Elle fut envisagée déjà par les Pythagoriciens¹. Platon de son côté pensait aussi que le temps était intimement lié au mouvement et plus particulièrement à celui des corps célestes :

« Les jours et les nuits, les mois et les saisons n'existaient point avant la naissance du ciel, mais leur naissance a été ménagée en même temps que le ciel a été construit. Car tout cela ce sont des divisions du temps. »²

Aristote a précisé ce même lien en posant temps et mouvement dans un rapport plus précis encore :

« Le temps n'est ni le mouvement, ni sans le mouvement..., par suite... il est quelque chose du mouvement... Le temps est le nombre du mouvement selon l'antérieur-postérieur. »³

Remarquons que les idées de succession et de mesure sont associées ici pour la première fois et que c'est par là que le temps fera son apparition dans la science moderne avec Galilée⁴.

b. *Le temps apparaît comme un ordre. Il est lié à la cause et présente un caractère d'irréversibilité.*

Leibniz a posé explicitement le temps comme un ordre : « Tempus est ordo existendi. »⁵ Cela implique que pour lui le temps n'est pas dans les choses, mais qu'il constitue une relation apportée par l'esprit.

« Le temps et l'espace, dit-il, sont pris comme hors des choses et servent à les mesurer. »⁶

Par là le temps s'apparente à l'idée de cause, puisque « *causa nihil aliud est quam realis relatio* »⁷.

Spinoza estime aussi que le temps n'est qu'une façon de penser aux choses⁸ et que son importance lui vient de la clarté qui jaillit sur les objets, lorsqu'on a saisi comment l'un découle logiquement ou naturellement des autres.

Enfin l'analyse de l'idée de cause conduit à envisager le temps comme irréversible. C'est ce qu'a bien montré Cournot par exemple.

¹ Selon Simplicius. Cité par SIVADJAN, *op. cit.*, I, p. 11.

² *Timée*, 37d.

³ *Phys.*, 219a.

⁴ Cf. Ch. X, 1.

⁵ *Init. math.*, III.

⁶ *Oeuvres*, éd. Gerhardt, VI, p. 584.

⁷ *Textes inédits*, apud *Vocabulaire philos.*, art. *Cause*.

⁸ *Pensées métaphysiques*, éd. Garnier, I, p. 446.

Dans son *Essai sur les fondements de nos connaissances* il distingue entre la raison objective qui est « un lien abstrait en vertu duquel une chose est subordonnée à une autre qui la détermine et qui l'explique »¹ et la cause proprement dite qu'il faut entendre comme cause efficiente². Celle-là, parce que abstraite, est un lien permanent qui conduit à la loi indépendante du temps, mais celle-ci « est par définition une fonction temporelle »³.

c. *Le temps apparaît indispensable à toute pensée en tant qu'elle s'applique au monde concret.*

On sait comment Kant, étudiant les formes *a priori* de la sensibilité, s'arrête à l'espace et au temps.

« Le temps... est une forme pure de l'intuition sensible... une représentation nécessaire qui sert de fondement à toutes les intuitions. On ne saurait supprimer le temps lui-même par rapport aux phénomènes... Sans lui, toute réalité des phénomènes est impossible. On peut les supprimer tous, mais lui-même (comme condition générale de leur possibilité) ne peut être supprimé. »⁴

Cela ne signifie pas sans doute qu'il soit impossible de penser hors du temps, au contraire. Platon avait déjà distingué entre deux mondes, celui des Idées qui se place dans l'éternité et celui des choses sensibles, des phénomènes apparents qui, lui, relève du temps⁵. Mais le texte de Kant laisse entendre que le temps constitue comme une condition nécessaire à toute expérience et à toute action concrètes. Nous aurons l'occasion de reprendre la chose au sein même des mathématiques⁶.

Quoique très superficiel, cet aperçu suffit à notre propos. En effet, temps et mouvement, temps et ordre, temps et action marquent en gros les propriétés essentielles du temps *lorsqu'il est pris au niveau du sens commun*. Or le caractère fonctionnel de la notion de temps fait que c'est précisément à ce niveau qu'il nous faut la saisir. Il ne peut être question, en effet, de rechercher en analyse mathématique la présence d'un temps créé tout spécialement pour servir de support à telle théorie ou à telle science dont les mathématiques ne relèvent pas. D'autre part, il est évident que nous ne saurions partir d'un « temps mathématique » (s'il y en a un) avant d'avoir conduit ce travail à chef. Seule la notion de « temps du sens commun » est suffisamment vague pour trouver une place dans n'importe quelle théorie et assez claire cependant pour qu'un accord des esprits se fasse à son sujet.

Ces réflexions nous ont conduit à adopter deux hypothèses de travail :

¹ *Op. cit.*, n° 13.

² *Ibid.*, n° 26.

³ J. DE LA HARPE, *De l'ordre et du hasard*, p. 217.

⁴ *Critique de la raison pure*, Esth. transc., 2^e sect., pp. 71-72 de la trad. Barni.

⁵ Cf. Ch. X, 1.

⁶ Cf. Ch. IX.

Hypothèse 1

Lorsque, au cours d'un ouvrage d'analyse, un mot n'est pas défini et lorsque son sens ne renvoie pas à un autre ouvrage plus élémentaire ou plus spécial, nous admettrons qu'il faut l'entendre selon l'usage courant.

Hypothèse 2

Lorsqu'un mot dont le sens a été saisi selon l'hypothèse 1 renvoie pour son intelligence à l'idée de temps, nous admettrons qu'il s'agit du temps du sens commun.

Remarquons que la seconde hypothèse suppose l'existence d'un temps qui serait comme un objet extérieur à celui qui parle. Et en fait, il nous arrivera souvent de nous exprimer comme si le temps existait, tel un milieu dans lequel les choses et nous-même sommes plongés. Toutefois ce n'est là qu'une façon de parler. Le caractère essentiellement relatif et fonctionnel que nous avons reconnu à l'idée de temps, les théories génétiques actuellement en vigueur¹ ne nous autorisent pas à penser au temps comme à un objet, mais seulement comme à une relation².

3. Méthode de travail

Muni de nos deux hypothèses, nous avons d'abord songé à entreprendre la lecture d'un ouvrage d'analyse « classique ». Nous nous proposons de noter chaque usage que son auteur aurait fait d'expressions temporelles, ce qui nous aurait fourni notre matériel d'étude. Cette méthode très simple ne nous a cependant pas donné les résultats que nous espérions et cela pour deux raisons :

1. Sitôt que nous quittons les fondateurs de l'analyse — et encore faut-il au moins excepter Euler³ — nous ne trouvons de mots temporels que tout au début des traités. Les premières définitions énoncées, le reste en découlait par un enchaînement de démonstrations où toute trace de temps était exclue. Et même si nous consultions des ouvrages assez récents, tels par exemple les *Eléments de mathématiques* de Bourbaki⁴, nous ne rencontrons plus nulle part de mots typiquement temporels.

2. Le mot seul nous est aussi rapidement apparu comme une garantie insuffisante de la présence du temps. Nous avons tenté de pallier à cette insuffisance en dressant une liste des principaux mots temporels

¹ Cf. X, 1.

² Cf. VI, 2.

³ Cf. Ch. V, 1.

⁴ N. BOURBAKI, *Eléments de mathématiques*.

et en comparant l'usage mathématique avec l'usage courant¹. Mais là encore des difficultés ont surgi. Souvent en effet l'image temporelle incluse dans un mot n'était plus qu'une survivance. Tel par exemple le verbe « tendre » dans la définition que Valiron donne de la limite d'une fonction². Inversement d'ailleurs, la langue courante offrait des possibilités si variées, tel par exemple le présent historique³, que nous nous sommes convaincu de l'insuffisance de la lettre du texte.

Nous avons donc songé à nous occuper moins des expressions elles-mêmes que des idées qu'elles voulaient exprimer, de sorte que le mot temporel nous a seulement servi de guide. Il s'est offert à nous comme le signal d'une étude à faire, sans qu'il se suffise à lui-même.

Nous avons pu constater alors que les notions qui s'exprimaient parfois en terme de temps n'étaient pas quelconques, mais qu'elles se groupaient autour des deux idées d'*ordre* et d'*infini*. Telles étaient principalement les notions de variable, de suite, de fonction, de limite, de continuité et même de nombre. Il restait donc à nous assurer que ces notions, non seulement avaient parfois été exprimées en un langage temporel, mais qu'elles avaient encore effectivement participé à l'idée de temps.

Conformément à l'attitude générale que nous avons prise, et qui veut faire usage d'un réalisme minimum, nous ne pouvions chercher à savoir si telle « chose », le nombre par exemple, relevait ou ne relevait pas en droit du temps. Il nous fallait examiner si, une fois au moins, un auteur s'était servi d'idées ou d'images temporelles pour expliquer ce qu'il entendait par nombre. C'est pourquoi, et bien que nous nous défendions de faire un travail d'historien, nous avons dû constamment recourir à l'histoire. Plus exactement nous lui avons demandé de nous fournir des faits. Elle nous sert à garantir aux mots de la langue scientifique des « ancêtres » qui, eux, appartiennent à la langue de communication⁴.

Remarquons enfin que cette façon d'utiliser l'histoire, sans faire de l'histoire, nous dispense de remonter jusqu'à la première formulation d'une idée, de chercher les sources ou les influences. Elle nous dispense même de nous demander si un auteur avait raison ou tort d'utiliser le temps dans telle question : il nous suffit qu'il l'ait fait.

4. Plan de l'ouvrage

Nous commencerons par assurer à notre problème une existence aussi naturelle que possible. Pour cela nous ferons voir que les idées de

¹ Voir l'Appendice.

² Cf. Ch. V, 2.

³ A. DAUZAT, *Grammaire*, pp. 210, 454.

⁴ La distinction entre « langue scientifique » et « langue de communication » est empruntée à l'ouvrage de G. MANNOURY : *Les fondements psycho-linguistiques des mathématiques*.

mouvement, de devenir, de génération, de temps se sont effectivement présentées à l'esprit des géomètres (chapitre II).

Il nous sera alors possible de chercher pour quelles notions précises le temps s'est montré fécond. Nous verrons au chapitre III que ce fut avant tout pour exprimer la notion de variable, elle-même nécessaire à la notion de limite, laquelle sous-tend à son tour celle de continuité.

La limite implique encore un autre concept : celui d'infini. Nous consacrerons le chapitre suivant à son étude et nous verrons alors que le temps y a joué un rôle très grand. Toutefois nous serons conduit à distinguer entre deux points de vue, dont l'un envisage l'infini dans le temps (infini potentiel) et dont l'autre, par un acte décisive et explicite, pose l'infini hors du temps (infini actuel). Il sera donc indispensable de reprendre les notions déjà examinées de variable, de limite et de continuité pour voir si elles sont complètement déterminables à l'aide de l'infini actuel, c'est-à-dire enfin sans le temps (chapitre V). Nous montrerons qu'il en est bien ainsi et que les notions d'ensemble, de relation et de quantificateur, en un mot les notions de base de la logique semblent suffire.

Toutefois nous aurons dû introduire en cours de route certaines relations particulières, dites relations d'ordre, auxquelles nous consacrerons le chapitre VI. Nous verrons alors que, si le temps est essentiel à l'idée d'infini potentiel, il l'est aussi à l'idée d'ordre. En effet, l'ordre ne s'exprime abstraitement qu'à la suite d'une marche dialectisante dont l'un des pôles est le temps.

Il est vrai que la définition de l'ordre comme une relation entre éléments d'ensembles tout à fait quelconques appartient davantage à la logique qu'aux mathématiques proprement dites. Les mathématiciens s'en tiennent le plus souvent à des ensembles de nombres ou d'abscisses sur lesquels ils définissent la relation « $<$ » ou la relation « $\leq$ ». C'est pourquoi nous étudierons les diverses notions de nombres. Nous examinerons d'abord les généralisations du nombre entier et en particulier les nombres irrationnels dont l'étude par Dedekind fut à la base de la théorie des ensembles¹. Nous passerons alors au nombre entier lui-même (chapitres VII et VIII). Cette double étude nous permettra de contrôler nos conclusions précédentes sur le rôle du temps.

Tout ce qui précède porte avant tout sur les rapports internes de l'analyse avec elle-même. Cela correspond aux liaisons que nous avons marquées entre temps et mouvement et entre temps et ordre. Reste maintenant la question du temps et du monde concret. Tout langage en effet, et les mathématiques ne font pas exception, se veut non seulement cohérent, mais doit encore exprimer ce qui, par rapport à lui, constitue un donné. Partie à la Renaissance de la volonté d'exprimer des faits physiques², l'analyse, une fois constituée, se retrouve souvent devant la même tâche.

¹ J. CAVAILLÈS : *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*, I, chapitre I.

² Chapitre X, 2.

Il est alors extrêmement probable que le temps y jouera de nouveau un rôle important. Nous consacrerons le chapitre IX à cette question en étudiant sommairement le calcul des probabilités, calcul qui peut être considéré comme une branche de l'analyse et comme une application des mathématiques.

Enfin dans le dixième chapitre nous présenterons nos conclusions.

5. Matériel utilisé

A côté des textes généraux ou plus philosophiques que mathématiques et qui ont servi à guider et à soutenir notre réflexion, nous avons consulté un assez grand nombre d'ouvrages d'analyse. En ce faisant notre souci était de voir comment il était possible d'exposer, avec l'aide du temps ou sans son concours, les notions qui nous ont retenu. Mais nous n'avons aucunement cherché à être complet (en un sens quelconque) ou à limiter la pensée d'un auteur aux fragments que nous en avons extraits. Bien au contraire. D'une part en effet nous avons relevé bon nombre de textes que nous ne citons pas. D'autre part, pour compenser un peu ces abstentions, nous avons souvent présenté un auteur dans une question et un autre dans une question voisine. Cette manière de faire nous a permis une appréciable économie de moyens tout en produisant chaque fois les textes les plus caractéristiques et en laissant entendre que le procédé exemplifié n'était pas propre uniquement à un auteur déterminé.

Notons aussi que les ouvrages choisis ne se situent pas tous au même niveau de pensée. Les uns, comme la *Méthode des fluxions* de Newton¹ ou les *Principia* de Whitehead et Russel¹, représentent le maximum de connaissances à un moment donné. Les autres, comme le *Cours d'analyse infinitésimale* de La Vallée Poussin par exemple, sont des ouvrages d'enseignement. On peut penser alors qu'ils ne reflètent pas uniquement la pensée scientifique de leur auteur, mais que celle-ci se combine avec des soucis pédagogiques. En particulier, on pourrait admettre que lorsque La Vallée Poussin écrit : « Soit x une variable réelle, qui passe *successivement* par une infinité de valeurs... »² il aurait pu tout aussi bien dire sans s'aider du temps : « soit x l'élément générique d'un ensemble de nombres réels ». La chose n'est pas douteuse. Mais encore une fois, nous ne prétendons pas examiner la pensée de La Vallée Poussin. Il nous suffit de retenir que, pour une raison quelconque, il a jugé bon de s'exprimer en terme de temps.

Nous ne donnons à la fin de cet essai que la bibliographie des ouvrages cités. On remarquera aussi parfois deux éditions différentes d'un même texte ou encore des éditions peu communes. Cela est dû aux difficultés que nous avons rencontrées à nous procurer certains livres au moment voulu. Nous nous sommes d'ailleurs efforcé de restreindre ces cas à quelques exceptions seulement.

¹ Voir notre Bibliographie.

² LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'analyse infinitésimale*, p. 11.

CHAPITRE II

L'IDÉE DE MOUVEMENT DANS LES DÉBUTS DE L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

1. *La géométrie grecque et les paradoxes de Zénon*

On sait que les géomètres grecs n'ont considéré le problème des coniques comme résolu qu'après que Ménéchme et plus tard Apollonius l'eurent traité en passant par les sections d'un cône¹. Un tel détour a de quoi étonner car deux méthodes en tous cas semblent se présenter au chercheur.

Prenons par exemple le cas de l'ellipse. Il est facile d'indiquer une construction qui reste dans le plan et qui permet d'obtenir un nombre quelconque de points de la courbe. L'ellipse peut donc être construite avec n'importe quelle précision. Un autre procédé serait celui que les jardiniers utilisent. Rien n'empêche d'imaginer que l'extrémité du bâton traceur est un point et que celui-ci, dans son mouvement, engendre la courbe.

Sous l'apparente simplicité de ces méthodes se cachent toutefois des hypothèses complexes. La construction point par point implique qu'il est possible de considérer une ligne comme l'agrégat de ses points ; la méthode des jardiniers exige l'introduction, non seulement d'un outil non reçu en géométrie, mais surtout d'une notion nouvelle : celle de mouvement. Or il se trouve que la pluralité aussi bien que le mouvement ont donné lieu à des difficultés considérables. Zénon, en effet, avait analysé ces deux notions et s'était même efforcé, selon Platon² de prouver leur caractère contradictoire.

Voici d'abord les arguments contre la pluralité, arguments rapportés par Simplicius et cités par A. Rey³ :

¹ A. REY, *La science dans l'antiquité*, T. V, pp. 121-162.

² *Parménide*, trad. Cousin, pp. 127-128.

³ *Op. cit.*, T. II, p. 160.

a. Supposons une ligne composée d'un nombre fini de points-unités. Alors, disait Zénon, « chaque un doit avoir une certaine grandeur et une certaine épaisseur, et doit être à une certaine distance de l'autre, et la même chose peut être dite de ce qui est devant lui ; car celui-ci aura aussi une grandeur, et quelque chose sera devant lui. C'est la même chose de dire cela une fois et de le dire toujours ; car aucune partie de lui ne sera la dernière... Donc, si les choses sont une pluralité, elles doivent être... grandes au point d'être infinies ».

b. Supposons maintenant que la ligne soit composée de points indéfiniment divisibles. Dans ce cas « si l'un n'avait pas de grandeur, il n'existerait pas même ». Et il en serait de même de la ligne.

Pour ce qui est du mouvement, Aristote en rapporte ainsi l'argumentation ¹ :

« Si toute chose... est, à quelque instant donné, en repos ou en mouvement et, si elle est en repos quand elle est dans un espace égal à elle-même, comme d'autre part ce qui est transporté est toujours dans l'instant, la flèche transportée est toujours immobile. »

De nombreux commentaires ont été donnés de ces paradoxes qui mettent, en effet, très sérieusement en question la non-contradiction des idées de pluralité et de mouvement ². Il en ressort que l'argumentation entière repose sur l'hypothèse que la ligne se compose d'une somme de points et que le temps se compose d'une somme d'instants, après quoi les raisonnements sont corrects. C'est donc là une hypothèse qu'il faut se garder d'utiliser et cela pourrait expliquer pour une part l'attitude négative des géomètres grecs en face des « courbes mécaniques ».

2. La méthode mécanique d'Archimède

Les restrictions précédentes semblent avoir considérablement gêné les recherches touchant aux longueurs des lignes courbes, aux aires, aux volumes, aux tangentes et aux centres de gravité. Mais tout fut changé par Archimède qui découvrit un point de vue nouveau en inventant sa méthode mécanique. « J'ai songé, écrit-il à Eratosthène, à t'exposer par écrit, et à illustrer... la nature particulière d'une méthode qui te permettra éventuellement de venir à bout de certaines propositions mathématiques par la mécanique. » ³ Il montre en effet comment sa méthode suppose des leviers, des masses, des mouvements, comment elle se sert de l'imagination et comment elle réalise de véritables expériences mentales pour parvenir aux résultats désirés.

¹ *Phys.*, VI, 9, 239b.

² Par exemple : J. BURNET : *L'aurore de la philosophie grecque*.

G. MILHAUD : *Les philosophes géomètres de la Grèce*.

A. REYMOND : *Logique et mathématiques*.

B. RUSSEL : *Méthode scientifique en philosophie*, 6^e conf.

³ *Oeuvres d'Archimède*, trad. Ver Eecke, p. 478.

Ce sont bien là des procédés mécaniques et les notions introduites sont celles mêmes que les sens vérifient chaque jour. Le mouvement, en particulier, n'y est nullement une notion abstraite qui tomberait éventuellement sous la critique de Zénon. C'est tout simplement le mouvement du sens commun, celui dont personne ne peut véritablement douter.

Soit, par exemple, à démontrer la proposition XII du traité *Des spirales* :

« Si des droites en nombre quelconque, menées de l'origine de la spirale à une spirale décrite dans une révolution quelconque, forment des angles égaux entre eux, ces droites se dépassent l'une l'autre d'une même grandeur. » ¹

Archimède avait d'abord défini la spirale de la façon suivante :

« Lorsqu'une droite, dont une extrémité est fixe, tourne uniformément dans un plan, reprenant la position d'où elle est partie, et que, sur la droite en rotation, un point se meut uniformément comme elle à partir de l'extrémité fixe, le point décrira une spirale dans le plan. » ²

Il raisonne ensuite de cette façon : Soit une spirale ABCD. Pendant que la droite tourne de AB à AC, le point mobile parcourt la différence AC—AB. Pendant qu'elle tourne de AC à AD, le point parcourt la différence AD—AC. Comme les temps mis à parcourir les angles sont égaux et que la vitesse de rotation est la même que celle du point, la proposition est démontrée. La démonstration consiste donc simplement à suivre du regard la droite qui tourne et le point qui se meut.

Peut-on considérer ce qui précède comme une véritable démonstration, c'est-à-dire une démonstration comparable à celles d'Euclide ? Archimède ne le pense pas :

« Ce que nous venons de dire ne démontre sans doute pas ce qui précède, mais donne jusqu'à un certain point l'idée que la conclusion est juste. C'est pourquoi, reconnaissant nous-même que la conclusion n'est pas démontrée, mais ayant l'idée qu'elle est exacte, nous donnerons en son lieu la démonstration géométrique. » ³

Cette remarque ne concerne pas spécialement la proposition ci-dessus. Elle porte sur la « méthode mécanique » en général. Mais, ce qui est particulièrement intéressant, c'est de constater que les démonstrations géométriques d'Archimède gardent souvent quelque chose du mouvement, à savoir le *devenir*.

Voici, par exemple, ce qu'on peut lire au corollaire de la proposition XX du *Traité de la quadrature de la parabole* :

Soit un segment déterminé par l'arc de la parabole ABC et la droite AC. On inscrit dans l'arc un triangle ABC de même base et de même hauteur. Archimède démontre alors « géométriquement » que Aire triangle ABC > Une demi-aire segment.

¹ *Ibid.*, p. 262.

² *Ibid.*, p. 242.

³ *Op. cit.*, p. 484.

Puis il dit : « Il est possible d'inscrire un polygone tel que les segments restants soient plus petits que toute aire donnée. En effet, il est clair que, si l'on retranche continuellement ce qui, en vertu de cette proposition [XX] est plus grand que leur moitié, les segments restants, *devenant continuellement*¹ plus petits, *deviendront*¹ moindres que toute aire donnée. »²

Cette dernière proposition, qui n'est rien autre que le lemme d'exhaustion, ne relève pas en droit de la méthode mécanique. Archimède n'en est pas l'inventeur. Il la doit, dit-il, à Eudoxe³ et elle est chez Euclide⁴. Et cependant elle est dans la même ligne que la méthode mécanique, à tel point qu'Archimède a su en tirer à lui seul plus de conséquences que tous ses prédécesseurs.

Ce qui importe d'ailleurs ici c'est d'avoir pu constater que l'analyse infinitésimale, telle que l'a pratiquée Archimède, fait intervenir le mouvement et donc le temps, soit par la méthode mécanique, soit pas le lemme fondamental d'exhaustion.

3. Le calcul des fluxions

Bien qu'ignorant l'ouvrage où Archimède exposait sa méthode mécanique⁵, Newton, à son tour, va fonder le calcul des fluxions sur le mouvement.

Barrow avait déjà eu l'idée de représenter toutes les courbes planes par des mouvements et de ne pas réserver ce mode de définition à certains cas particulièrement rebelles :

« Omnis in uno plano constituta linea procreari potest e motu parallelo rectae lineae et puncti in ea. »⁶

Le calcul des fluxions s'appuie sur la même idée. Ainsi peut-on lire au début du *Tractatus de quadratura* :

« Quantitates mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas hic considero. Lineae describuntur ac describendo generantur non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum. »⁷

Newton insiste. Il ne s'agit pas d'imaginer que l'objet est composé d'une infinité de particules discrètes, comme Cavalieri par exemple l'avait

¹ C'est moi qui souligne.

² *Op. cit.*, p. 398.

³ Préface de la *Quadrature de la parabole*.

⁴ L. X, Theor. 1, Prop. 1.

⁵ F. ENRIQUES : *L'évolution des idées géométriques*, p. 24.

⁶ Cité par GERHARDT, apud *Die Entdeckung der höheren Analysis, Lectionibus geometricis, III*.

⁷ *Op. cit.*, p. 3.

tenté¹. Les quantités mathématiques sont *engendrées* par un mouvement continu.

Alors « quantitates aequalibus temporibus crescentes et crescendo genitae, pro velocitate majori et minori qua crescunt ac generantur, evadunt majores vel minores »².

C'est pourquoi les quantités engendrées peuvent s'appeler « fluentes » et leur vitesse d'accroissement « fluxion ». Mais pour pouvoir appliquer la mesure à ces grandeurs, il faut encore en choisir une, qui varie uniformément, et à laquelle on comparera les autres. C'est ce que fait Newton dans sa *Méthode des fluxions* :

« Je supposerai qu'une des quantités proposées... doit augmenter par une fluxion uniforme, à laquelle quantité je rapporterai tout le reste comme si c'était au temps ; donc par analogie cette quantité peut avec raison recevoir le nom de temps. »³

Le temps qui est introduit explicitement joue le rôle de variable continue. Sans doute est-ce seulement par analogie que la variable reçoit le nom de temps. Mais il faut se souvenir que pour Newton le temps est une réalité absolue⁴. Il n'y a donc qu'un seul temps proprement dit tandis qu'il y a autant de variables que de problèmes différents. Celles-ci ne peuvent donc pas être le temps : elles ne peuvent qu'en être des images.

Mais le temps joue encore un autre rôle. Soit par exemple à résoudre le problème suivant, exposé aux pages 8 et 9 du *Tractatus* :

« Data aequatione quocunque fluentes quantitates, involvente invenire fluxiones ». Soit :

$$(1) \quad x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = 0$$

l'équation donnée entre les fluentes z, y, x . Désignons par $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}$ les fluxions respectives. Alors $o\dot{z}, o\dot{y}, o\dot{x}$ sont les « moments » des fluentes, « id est incrementa momentanea ».

Si, au moment où commence le calcul « quantitates fluentes jam sunt z, y et x , hae post momentum $[o]$ temporis incrementis suis $o\dot{z}, o\dot{y}, o\dot{x}$ auctae, evadent $z + o\dot{z}, y + o\dot{y}, x + o\dot{x}$. » L'équation (1) devient :

$$(2) \quad x^3 + 3x^2 \cdot o\dot{x} + 3x \cdot o^2\dot{x}\dot{x} + o^3\dot{x}^3 - xy^2 - o\dot{x} \cdot y^2 - 2x \cdot o\dot{y} \cdot y - 2y \cdot o^2\dot{y}\dot{y} - x \cdot o^2\dot{y}\dot{y} - o^3\dot{x}\dot{y}\dot{y} + a^2z + a^2 \cdot o\dot{z} - b^3 = 0$$

Soustrayons l'équation (1) de l'équation (2) :

$$(3) \quad 3x^2 \cdot o\dot{x} + 3x \cdot o^2\dot{x}\dot{x} + o^3\dot{x}^3 - o\dot{x} \cdot y^2 - 2x \cdot o\dot{y} \cdot y - 2y \cdot o^2\dot{y}\dot{y} - x \cdot o^2\dot{y}\dot{y} - o^3\dot{x}\dot{y}\dot{y} + a^2 \cdot o\dot{z} = 0.$$

Divisons par o :

$$(4) \quad 3x^2\dot{x} + 3xo\dot{x}\dot{x} + o^2\dot{x}^3 - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y - 2xo\dot{y}\dot{y} - xo\dot{y}\dot{y} + a^2\dot{z} = 0.$$

¹ M. MARIE : *Histoire des sciences*, T. IV, pp. 69-90.

² *Tractatus*, p. 3.

³ *Op. cit.*, n° LIX.

⁴ H. OSIEKA : *Der Raum und Zeitbegriff bei Newton*.

Enfin, « minuatur quantitas o in infinitum et neglectis terminis evanescentibus restabit

$$(5) \ 3ix^2 - \dot{xy}^2 - 2x\dot{y}y + a^2\dot{z} = 0 \ ;$$

hac aequatione definitur relatio fluxionum ».

Cet exemple pourrait suggérer une critique que Berkeley a d'ailleurs formulée¹. Pour passer de l'équation (4) à l'équation (5) on néglige certains termes, tous ceux qui contiennent o ou une puissance de o . Alors, pour autant que o ne soit pas nul, on commet une erreur. Mais d'autre part, si o est tout à fait nul, l'équation (3) est triviale. Et vous n'en sortirez pas, disait Berkeley, car « you can admit no quantity as a medium between a finite quantity and nothing »².

C'est la perspective temporelle adoptée par Newton et que Berkeley ne veut pas voir, qui lève la contradiction. A quelles conditions, en effet, deux quantités sont-elles égales ? Newton le dit dans les *Principes* :

« Les quantités... qui tendent naturellement à devenir égales pendant un temps fini et qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales. »³

Ainsi n'est-il nullement besoin d'inventer des quantités pseudo-nulles ou de négliger quoi que ce soit. Simplement il y a des grandeurs qui évoluent par nature et qui finissent par disparaître. On convient alors d'anticiper sur leur évanouissement.

Conclusions

Ce qui précède ne prétend pas constituer un historique du calcul différentiel. Les faits rapportés voudraient faire voir que le temps figure effectivement parmi les intuitions fondamentales qui ont permis la naissance de l'analyse. Si l'on convient en effet de nommer « géométrie grecque » le contenu des *Eléments* d'Euclide, on est frappé par son caractère rigoureux mais statique. Cela peut tenir en partie au fait qu'Euclide était platonicien⁴ et que aux yeux de Platon les mathématiques recherchent « la connaissance de ce qui est toujours et non de ce qui naît ou périt »⁵. Mais cela tient sans doute aussi à la mise en garde de Zénon contre ce qui relèverait d'une certaine notion du mouvement.

En opposition à ceci Archimède, par le développement de la méthode d'exhaustion, Newton par la création du calcul des fluxions font usage de mouvements et introduisent le temps dans leurs raisonnements. S'il s'agit

¹ *The Analyst*, Works, Vol. III.

² *Op. cit.*, p. 24.

³ L. I, lemme I.

⁴ Proclus, cit. par P. TANNERY : *La géométrie grecque*, pp. 64-70.

⁵ *République*, trad. Cousin, L. VII, p. 88.

d'une coïncidence, elle est d'autant plus curieuse que Leibniz en appelle lui aussi au temps pour étayer l'analyse infinitésimale.

« L'analyse nouvelle des infinis, dit-il, ... se sert d'une nouvelle affection des grandeurs variables, qui est la variation même. »¹

Il est vrai qu'il fait une place moins importante que Newton au mouvement. Mais il ne nie pas que mouvement, vitesse, temps puissent légitimement figurer en géométrie.

« Lineae, imo et figurae omnes sunt motuum vestigia, et constituta lege motus, tempus, velocitatem, viam definire, rem purae Geometriae esse censeo. »²

Il est ainsi hors de doute que l'idée de mouvement a joué un rôle dans les débuts de l'analyse. Il reste à le préciser.

CHAPITRE III

LA LIMITE

Parmi les diverses espèces de limites, deux seulement nous retiendront d'abord : la limite d'une variable et la limite d'une fonction. D'une part ce sont celles qui sont apparues historiquement les premières ; d'autre part ce sont celles qu'on trouve encore parfois exposées sans l'intermédiaire de la théorie des ensembles.

1. Limite d'une variable

Certains auteurs, Duhamel par exemple, définissent immédiatement la notion complexe de « limite-d'une-variable ». Sans expliquer préalablement ce qu'il faut entendre par « variable », il dit en effet :

¹ *Anal. inf.*, VI.

² *Init. math.*, V.

« Nous appelons limite d'une variable, une quantité constante dont la variable approche indéfiniment sans jamais l'atteindre. »¹

Mais le plus souvent l'expression est analysée en deux composantes : la variable et la limite. La variable est alors définie

— soit comme une grandeur qui *change* de valeurs au cours d'une même question :

« On appelle *quantités variables* en Géométrie les quantités qui varient suivant une loi quelconque... On les appelle ainsi par opposition aux quantités constantes, qui sont celles qui ne changent point. » (D'Alembert.)²

— soit comme une grandeur qui reçoit des valeurs *successives* :

« On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. » (Cauchy.)³

— soit enfin comme une grandeur qui *pass*e par diverses valeurs :

« Soit x une *variable réelle*, c'est-à-dire une quantité qui passe par une infinité de valeurs réelles, distinctes ou non. » (La Vallée Poussin.)⁴

La variable est donc conçue ici comme une quantité en devenir. Sans doute n'est-elle pas assimilable au temps, puisque ses variations peuvent être quelconques. Il reste toutefois qu'elle doit prendre ou recevoir des valeurs successives, c'est-à-dire distinctes dans le temps. La Vallée Poussin semble bien lever la condition pour les valeurs d'être distinctes. Son texte interprété à la lettre, conduit à considérer encore comme variable une quantité qui aurait une seule et même valeur. Mais c'est là jouer sur les mots, une telle grandeur étant, par définition, une constante. On peut donc dire que les trois textes ci-dessus, d'époque très différente, font reposer l'idée de variable sur celle de temps.

Il en est tout autrement de la limite qui, en elle-même, est une quantité fixe, une constante. Les trois auteurs déjà cités s'expriment en effet ainsi :

— D'Alembert : « On dit qu'une grandeur est la *limite* d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche, en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa *limite* est absolument inassignable.

» A proprement parler, la *limite* ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra. »⁵

— Cauchy : « Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. »⁶

¹ *Eléments de calcul infinitésimal*, p. 9.

² et ⁵ *Encyclopédie*, articles *Variable* et *Limite*.

³ et ⁶ *Leçons sur le calcul différentiel*, p. 1.

⁴ *Cours d'analyse infinitésimale*, Introd., p. 10.

— La Vallée Poussin : « Soit x une variable réelle qui passe *successivement* par une infinité de valeurs suivant une loi quelconque, de telle sorte qu'à chaque valeur prise par x , on puisse distinguer les valeurs qui précèdent de celles qui suivent et qu'aucune valeur de x ne soit la dernière. On dit que x *tend vers une valeur déterminée*, si les valeurs successives de x se rapprochent d'un nombre déterminé a , de telle sorte que la différence $x-a$ *finisse* par décroître en valeur absolue au-dessous de tout nombre positif donné ϵ si petit qu'il soit. »¹

Ces textes sont clairs : ce qui « approche », « devient », « précède », « suit » c'est toujours la variable. Mais comme la limite n'existe qu'en tant que limite-d'une-variable, elle fait, quoique médiatement, appel au temps et c'est, en définitive le devenir de la variable qui confère à une grandeur sa qualité de limite.

Soit en effet une variable x . Supposons qu'elle prenne successivement les valeurs 0,9 ; 0,99 ; 0,999 ; etc. Le nombre 1 n'est limite de x que pour autant que le « etc. » indique un perpétuel devenir. Si la variable s'arrêtait, mettons après n termes, elle aurait *atteint* la valeur $(1 - 10^{-n})$ et n'aurait plus de limite. D'autre part les valeurs successives de la variable doivent être ordonnées. Cela a lieu sans plus, si l'on entend « successif » comme se suivant dans le temps.

Notons encore que les notions d'infiniment petit et d'infiniment grand, par où la limite a fait son entrée en analyse, apparaissent aujourd'hui comme des cas particuliers. La première comme « une variable qui a pour limite zéro »², la seconde, par un abus de langage, comme une variable dont « les valeurs finissent par surpasser *définitivement* tout nombre assignable »³.

2. Limite d'une fonction

Passons maintenant à la limite d'une fonction. En un certain sens on représente par le mot « fonction » une espèce de variable.

« Quand les valeurs successives d'une quantité variable, dit Sturm, dépendent, suivant une certaine loi, de celles que prend une autre variable, la première est dite une fonction de la seconde. »⁴

En tant que non constante, la fonction *change* de valeur, *passse* par divers états et relève du temps tout comme la variable. Ses variations sont simplement commandées par celles d'une autre quantité. Dès lors, si la fonction y a une limite b , b est un certain nombre fixe que y doit *approcher* indéfiniment.

Toutefois cette façon d'envisager les choses n'est pas fréquente. Ce

¹ *Op. cit.*, Introd., p. 11.

² LA VALLÉE POUSSIN, *op. cit.*, p. 17.

³ LA VALLÉE POUSSIN, *op. cit.*, pp. 11-12.

⁴ *Cours d'analyse*, p. 1.

qui importe en effet c'est avant tout l'étude simultanée de x et de y . Ce n'est plus alors la suite des valeurs de y qui compte, mais *la loi* qui, étant donné une valeur de x , fournit la ou les valeurs de y . On ne définit pas tellement la fonction que « être fonction de ». Ainsi selon Cauchy :

« Deux quantités algébriques variables sont dites *fonctions* l'une de l'autre, quand elles varient simultanément, de telle sorte que la valeur de l'une détermine la valeur de l'autre. » ¹

La limite apparaît alors comme une propriété de la relation qui lie x et y . Le temps fonde x et y en tant que variables, mais la fonction-loi représente justement ce qui ne change pas. Dans ces conditions la limite d'une fonction s'exprime sans allusion au temps, selon la forme classique suivante :

On dit qu'une fonction $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ ou a pour limite $f(x_0)$, « si, à tout nombre positif ε choisi à l'avance, aussi petit qu'on veut, on peut faire correspondre un nombre positif η tel que l'inégalité $|x - x_0| \leq \eta$ entraîne la suivante :

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad »^2.$$

Dans le cas où l'on écrit : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ on a coutume de lire : « la limite de $f(x)$, quand x tend vers x_0 , est $f(x_0)$ ». Le verbe « tendre » pourrait faire croire à la présence du temps, mais en fait, il ne s'agit plus que d'une survivance. En effet, ni la variable x , ni la fonction $f(x)$ ne sont envisagées ici sous l'aspect de leur évolution. Toutes deux sont données préalablement et la courbe représentative est comme déjà tracée. On revient alors en arrière pour considérer certaines valeurs particulières, x_0 et $f(x_0)$. Celles-ci dépendent l'une de l'autre comme toutes les valeurs de la fonction, mais de plus, si x est voisin de x_0 , $f(x)$ et $f(x_0)$ jouissent de propriétés supplémentaires.

Il est vrai qu'on pourrait aussi présenter la chose sous la forme d'un dialogue qui se présenterait ainsi :

— Je choisis $\varepsilon_1 = 0,1$. — Alors voici η_1 tel que $|f(x) - f(x_0)| < 0,1$.
— Je choisis $\varepsilon_2 = 0,01$. — Alors voici η_2 . *Et ainsi de suite.*

C'est bien là une façon de présenter temporellement la limite des fonctions. Seulement il faut noter que ce dialogue n'est possible que parce qu'on est assuré à l'avance qu'il y a toujours un η . De sorte que le temps n'est pas ici le fondement mais la conséquence de la définition.

3. La continuité

La notion de « continuité d'une fonction » se ramène sans autre à celle de limite et le temps n'y intervient pas davantage. Voici par exemple

¹ Exercices d'analyse, T. III, p. 308.

² J. HAAG : Cours de mathématiques spéciales, p. 67.

la définition qu'en donne La Vallée Poussin, définition d'ailleurs valable pour une fonction de n variables :

« Une fonction $f(x, y, \dots)$ est continue au point $(a, b, \dots)$ si $f(x, y, \dots)$ a pour limite $f(a, b, \dots)$ quand $x, y, \dots$ tendent respectivement vers $a, b, \dots$ d'une manière quelconque. » ¹

Voyons maintenant le cas d'une variable isolée. Pour les fondateurs de l'analyse, et tout particulièrement pour Newton, il n'y avait que des variables continues. Mais, au niveau où se situent les textes de ce chapitre, un nouvel effort d'analyse tend à dissocier les notions et par là à les généraliser. C'est ainsi que la variable a été définie plus haut sans qu'il soit donné d'indications sur la façon dont elle évoluait. D'autre part, pour un grand nombre de questions, et notamment pour toutes celles où figurent des limites, il est nécessaire de disposer de variables qui jouissent de propriétés particulières. Celles-ci n'étant pas nécessairement impliquées par le concept de variable devront donc être posées par ailleurs. Le problème est alors de savoir ce qu'il conviendra d'appeler *continuité*.

Une solution consiste à appeler tout justement continuité les conditions nécessaires à assurer les limites. C'est ainsi que les Anciens avaient procédé. Le lemme d'exhaustion en effet, sous la forme que lui donne Euclide par exemple, pose l'indéfinie répétition d'une certaine opération :

« Deux grandeurs inégales étant données, si de la plus grande on retranche une grandeur plus petite que sa moitié, et de ce qui reste une grandeur plus grande que la moitié de ce reste, et si le processus est répété continuellement, le reste sera moins grand que la plus petite des deux grandeurs données. » ²

Mais une telle suite d'opérations n'est pas toujours possible. Il faut encore que les grandeurs s'y prêtent, ou qu'elles soient « continues ». C'est pourquoi Aristote avait précisément posé :

« Est continu ce qui est divisible en parties toujours divisibles. » ³

Cette conception toutefois n'est apparue tout à fait satisfaisante que dans le cadre d'une mathématique axiomatisée. Elle s'accompagne encore ici du désir de ne pas construire n'importe quoi et notamment de retrouver sous le nom de continuité ce qu'on pensait en savoir intuitivement. C'est la seule explication possible à une réflexion comme celle-ci, due à Paul Du Bois Reymond :

« La représentation de l'espace, immobile et fixe, ne fera jamais sortir l'image d'une ligne véritablement uniforme d'une suite de points..., car des points n'ont pas de

¹ *Op. cit.*, Introduction, pp. 29-30.

² Cit. et trad. REY, *L'apogée...*, pp. 268-269.

³ *Physique*, L. VI, trad. St. Hilaire, p. 347.

dimensions et par conséquent une suite de points... ne peut jamais devenir une distance. »¹

En somme l'auteur oppose ici deux notions qu'il connaît : le *continu* dont le type serait fourni, comme Bergson l'a d'ailleurs encore soutenu², par le devenir ; le *discontinu* qui serait caractérisé par des unités séparées, points ou nombres. D'autre part il met une fois de plus en évidence les difficultés signalées par Zénon. On ne construira une grandeur continue que par le mouvement d'un de ses éléments. Le temps sera essentiel.

On est alors conduit à des définitions du genre de la suivante, due à Lacroix :

« La loi de continuité est « la loi qui s'observe dans la description des lignes par le mouvement, et d'après laquelle les points consécutifs d'une même ligne se succèdent sans aucun intervalle. »³

En plus des termes mêmes, ce texte montre remarquablement la nécessité du temps, puisque son auteur n'a pas hésité à lui donner une forme contradictoire pour y glisser le verbe « se succéder ». En effet, deux points étant consécutifs s'il n'en existe aucun entre eux, le texte cité signifie :

une ligne est continue lorsque elle ne possède *pas* de points consécutifs.

C'est bien là une des propriétés des grandeurs continues au sens de la théorie des ensembles⁴, mais cette manière de présenter les choses ne fait plus allusion au temps et Lacroix n'a pas cru devoir l'adopter.

Un dernier exemple conduira encore aux mêmes conclusions. Voici comment Duhamel définit la variable continue :

« Une variable est continue lorsqu'elle ne peut passer d'une valeur quelconque à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. »⁵

Entendue à la lettre, cette définition conduit à considérer comme continue même la variable qui prendrait successivement les valeurs 1, 2, 3, ..., puisqu'elle ne saurait passer de 1 à 3 par exemple sans prendre, par définition, toutes les valeurs intermédiaires. Il est toutefois hors de doute que ce n'est pas là ce que veut son auteur, qui ne l'a posée que pour assurer la possibilité des limites. Le sens de ce texte est donc :

une variable est continue lorsqu'elle passe d'un mouvement continu d'une valeur à l'autre.

Le cercle de cette formule souligne encore une fois l'étroite dépendance entre la continuité et le temps.

¹ *Théorie générale des fonctions*, Chap. I, p. 69.

² *Essai sur les données immédiates*, Chap. II.

³ *Traité de calcul différentiel*, Préface, p. XXV.

⁴ Cf. Chapitre V.

⁵ *Eléments de calc. inf.*, p. 222.

Conclusions

Les textes de ce chapitre, choisis hors de la théorie des ensembles, conduisent à distinguer deux attitudes, selon qu'il s'agit de variable ou de fonction. L'une s'appuie sur le temps ; l'autre utilise l'indétermination.

La variable est posée comme quelque chose qui varie, qui devient, qui passe par une suite de valeurs. La limite d'une variable est sans doute un nombre fixe, mais il est nombre dont on se rapproche et cela non pas accidentellement, mais fondamentalement. La limite n'est jamais atteinte et si la variable cesse de l'approcher, elle n'est plus limite. La propriété pour une variable enfin d'être continue n'est rien d'autre encore que celle de passer d'une valeur à une autre sans rien sauter.

La fonction est aussi une variable, mais le même mot a encore un autre sens. La fonction est une *relation* entre grandeurs variables. Elle est donc hors du devenir des variables dont elle est même le seul élément constant. Alors la limite d'une fonction et sa continuité se définissent sans faire usage du temps. Il s'agit de propriétés de certaines relations, propriétés qui s'expriment complètement par l'intermédiaire de la notion du quelconque.

Il est vrai qu'un nouveau problème se pose alors. Si une proposition est vraie pour une valeur *quelconque* d'une variable, elle est vraie, en conséquence, pour *toutes* les valeurs de la variable. Mais ces valeurs sont en général une infinité. Peut-on les envisager comme une totalité ? Ce sera à la théorie des ensembles de répondre par l'affirmative. En attendant on peut remarquer qu'il est possible de donner une solution qui réintroduit le temps. Puisque la proposition considérée, mettons : « L'inégalité $|f(x) - f(x_0)| < \eta$ est vérifiée dès que $|x - x_0| \leq \varepsilon$ » est vraie quel que soit ε , c'est qu'elle est vraie pour $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, etc. Ici « etc. » est le signe d'une suite véritablement sans fin.

S'il est donc possible de se passer pour les fonctions et du temps et de l'infini, ce n'est que par un artifice qui, à la première analyse, conduit tout de même à l'idée d'infini.

CHAPITRE IV

L'INFINI

1. *Infini potentiel et infini actuel*

La méthode des ε permet de définir la notion de limite sans faire intervenir l'idée d'infini. Toutefois limite et infini sont historiquement liés, ce qui apparaît par exemple dans la question suivante : De quel droit peut-on éventuellement substituer une limite fixe à une variable mobile ?

Si l'on s'en tient strictement aux définitions rappelées plus haut, la réponse est immédiate. Il suffit de montrer qu'il découle de ces définitions que la limite d'une somme est égale à la somme des limites et autres propositions semblables. Mais cela suppose que la limite n'est effectivement rien d'autre que ce qu'implique sa définition, ce qui n'a pas toujours été le cas. Souvent en effet, la limite est connue d'emblée et elle peut sembler exister indépendamment de la variable qui l'approche.

Considérons par exemple les deux quantités

$$y_1 = \sqrt{c^2 + x^2} \text{ et} \\ y_2 = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - + \text{etc.}$$

Dans une lettre à Leibniz de 1676, Newton explique comment par un algorithme simple¹ il tire y_2 de y_1 et comment « possint inde varia² Approximationes . . . formari ». Envisageons en effet la différence $y_1 - y_2$ après avoir calculé n termes. Si n est grand, $y_1 - y_2$ est petite ; si n est très grand, $y_1 - y_2$ est très petite, *et ainsi de suite*. Tandis que n croît de plus en plus, la différence $y_1 - y_2$ diminue sans cesse. Les valeurs de y_2 fournissent ainsi une suite d'approximations toujours meilleures de y_1 . Celles-ci ont une incontestable utilité pratique, mais ne sont que des

¹ Par la formule du binôme.

² *Oeuvres de Leibniz*, Ed. Gerhardt, Erste Abt., Band I.

approximations, c'est-à-dire que, quel que soit le nombre de termes calculés, $y_2 \neq y_1$. Et comme y_1 est déjà connue formellement on peut être tenté de penser qu'elle existe en soi et que, partant, on commet une erreur en lui substituant y_2 .

Malgré le terme d'« approximation », Newton avait déjà reconnu qu'il n'y avait pas d'erreur. Il expliquait la chose en disant que « à la fin » $y_2 = y_1$. Les limites sont, en effet, des valeurs que les variables

« peuvent toujours approcher de plus près que d'aucune différence donnée, qu'elles ne peuvent jamais passer, et qu'elles ne sauraient atteindre, si ce n'est dans l'infini »¹.

C'est cette restriction qui fonde l'exactitude du calcul des limites. Reste alors à voir le sens qu'il faut lui donner. On pourrait d'abord n'y voir qu'une façon de parler. « Atteindre une limite à l'infini » ce serait simplement pouvoir s'en approcher de plus en plus. Il en serait alors comme de deux droites parallèles dont on peut dire qu'elles se rencontrent « à l'infini », pour éviter seulement d'avoir à dire qu'elles ne se coupent pas. C'est bien ainsi que Newton semble l'entendre. Dans le Livre II des *Principes* il précise en effet :

« Je considère ici ces quantités comme variables et croissant ou décroissant comme par un mouvement ou flux *perpétuel*. »²

Leibniz, après un instant d'hésitation au début de ses recherches³, hésitation qu'il reniera plus tard⁴, est du même avis :

« Ut nego rationem, cujus terminus sit quantitas nihilo minor, esse realem, ita etiam nego, proprie dari numerum infinitum, vel infinite parvum. »⁵

Cette façon de voir n'est pas propre aux Anciens. Dans la *Grande Encyclopédie*, A. Denjoy s'exprime ainsi :

« On dit qu'un nombre *variable* x est infiniment grand positif quand, dans sa variation, il finit par *devenir* et *demeurer* supérieur à tout nombre donné d'avance. »

« La définition de l'infiniment grand positif ne signifie pas qu'une telle variable finit par demeurer supérieure à tous les nombres à la fois... Mais il finit par devenir et *demeurer* supérieur à 10. Il finit ensuite par devenir et demeurer supérieur à 100... et ainsi pour toute puissance de 10 donnée d'avance. »⁶

Dans tous ces textes, le mot « infini » qualifie toujours une variable.

¹ *Principes*, pp. 48-49. C'est moi qui souligne.

² Lemme II. C'est moi qui souligne.

³ Notice du 26. 3. 76, citée par Gerhardt, dans l'Introduction aux textes de l'*Anal. inf.*

⁴ *Anal. inf.*, XVIII.

⁵ *Anal. inf.*, XXIX.

⁶ T. I. 3^e partie, Section B.

Il marque une façon particulière de devenir. Il peut être appelé *infini potentiel*¹.

On pourrait toutefois raisonner autrement. Prenons le cas de l'infiniment petit x . Puisque x doit finir par devenir plus petit que toute quantité donnée, il doit finir par devenir et rester plus petit que 10^{-1} , puis que 10^{-2} et ainsi pour toute puissance négative de 10 donnée. Alors, la seule façon d'être à coup sûr assez petit est d'être tout à fait nul. C'est ainsi, par exemple, que raisonne Euler :

« Quærenti ergo, quid sit quantitas infinite parva in mathesi, respondemus eam esse revera $= 0...$; non poterit non esse nulla ; nam nisi esset $= 0$, quantitas assignari potest ipsi æqualis, quod est contra hypothesin. »²

J. Bernoulli fait de même :

« Quod data parvis quantitate minus sit, illud est non quantum seu nihil. »³

Cette façon de raisonner prête toutefois à confusion, la même confusion qui permet à certains auteurs d'écrire « $\lim x = x_0 f(x)$ »⁴. Si l'on s'en tient au point de vue temporel, x n'est jamais égale à x_0 , mais x *tend* vers x_0 . Ce qui fait qu'il faut écrire $x \rightarrow x_0$ et non pas $x = x_0$. La limite en effet ne s'atteint pas, elle n'est pas la dernière valeur d'une suite, puisqu'une telle suite est posée comme in-finie, c'est-à-dire sans valeur dernière.

Par contre, on peut se demander s'il est possible de considérer une suite sans fin, comme complète, comme actuellement et totalement donnée à la pensée. Il s'agirait alors de l'*infini actuel*. Celui-ci est-il recevable ? Plusieurs philosophes, dont Descartes, ne le pensent pas et ceci au nom de l'argument suivant :

« Il serait ridicule que nous, qui sommes finis, entreprissions d'en [de l'infini] déterminer quelque chose, et par ce moyen le supposer fini en tâchant de le comprendre. »⁵

Mais cet argument, souvent repris, suppose un sens particulier au mot « infini ». « Infini » serait, par une décision non avouée, le qualificatif de ce qui nous échappe. En quel cas il est vain, en effet, de chercher à en tirer plus qu'une négation. Mais ce n'est pas sous cette forme qu'il est apparu dans les pages précédentes où il caractérise seulement une grandeur actuellement plus grande que toute autre. La question est donc de savoir si une telle notion est, ou n'est pas, compatible avec les défi-

¹ A. LALANDE, *Vocabulaire de la philosophie*, art. *Infini*.

² *Institutiones calculi differentialis*, Cap. III, n° 83.

³ *Positiones*, Pars I, Prop. I.

⁴ Par exemple : GOURSAT, T. I., p. 64 ; WEBER, p. 389. Ces auteurs sont d'ailleurs conscients que le signe « $=$ » utilisé en ce sens est différent du signe d'égalité.

⁵ *Principes*, n° 26.

nitions déjà données et non pas si elle nous échappe plus qu'une autre. Il semble bien à première vue qu'elle soit effectivement incompatible. En voici trois exemples :

1. L'expression « un nombre réel infini » n'a pas de sens. Appelons en effet « nombre réel » tout objet de pensée qui obéit aux opérations de l'arithmétique. Alors un nombre plus grand que tous les autres n'est plus un nombre au sens ci-dessus.

2. Appelons « variable », comme plus haut, toute grandeur qui prend successivement des valeurs distinctes. Une « variable infinie » n'est plus une variable, puisqu'elle a atteint une valeur fixe.

3. Prenons, pour finir, un exemple géométrique, dû à Schumacher ¹.

Démontrons d'abord le lemme suivant :

Dans tout triangle dont deux côtés sont infinis, la somme des angles adjacents au côté fini vaut 180° .

Soit en effet ABC un tel triangle, AB étant fini. Menons un cercle de centre A et de rayon infini AC. L'arc CD donne la mesure de l'angle α . Mais le même arc CD donne aussi la mesure de β .

« Weil bei einem Kreise von unendlichem Halbmesser eine endliche Verückung des Mittelpunkts für 0 zu achten ist. »

On a donc bien :

$$\text{CAD} + \text{CBA} = \text{CBD} + \text{CBA} = 180^\circ$$

Dès lors soit un triangle ABC quelconque. Avec AB comme base formons un triangle ABD dont les côtés AD et BD soient infinis. Appliquons le lemme ci-dessus :

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \delta &= 180^\circ \\ \varepsilon + \delta &= 180^\circ \\ \gamma + \varepsilon &= 180^\circ.\end{aligned}$$

D'où par addition : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Ce qui démontre le postulat d'Euclide.

En face de ces faits deux attitudes sont possibles. L'une, adoptée entre autre par Gauss en réponse à la démonstration de Schumacher, et qui proteste :

« gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während andern ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist » ².

Cela signifie la volonté de se confiner à l'infini potentiel.

L'autre attitude, au contraire, consiste à passer outre, à analyser le plus complètement possible l'idée d'infini actuel, puis à reprendre les autres notions pour les rendre compatibles avec la nouvelle théorie. C'est ce que Cantor inaugure par sa théorie des ensembles.

¹ Lettre à Gauss du 29. 6. 31. *Oeuvres de Gauss*, T. VIII.

² *Oeuvres de Gauss*, T. VIII, p. 216.

2. Ensembles finis et infinis

Les nombres transfinis, tant ordinaux que cardinaux, conduisent à considérer des ensembles infinis et à en parler comme d'ensembles finis.

Admettons avec J. Tannery, que « la notion d'ensemble est de celles que le lecteur possède déjà »¹, et cherchons seulement à définir un ensemble infini par opposition à un ensemble fini. L'une des notions étant la négation de l'autre on peut choisir de partir soit de l'une, soit de l'autre.

1. Un ensemble fini est un ensemble qui ne jouit pas de certaines propriétés (définition négative). Par exemple :

— « Un ensemble M est appelé *infini* ou *transfini* lorsqu'il existe un véritable sous-ensemble de M qui est équivalent à M ; si au contraire il n'existe aucun véritable sous-ensemble de M qui lui soit équivalent, alors M sera désigné comme ensemble fini. »²

— « Un ensemble E est fini lorsqu'il existe une application de E sur lui-même telle qu'aucune des parties véritables de E ne soit appliquée sur elle-même. »³

— « Un ensemble E est fini s'il vérifie la condition minimale : tout ensemble M non vide de parties de E contient un sous-ensemble A minimal (ou irréductible), c'est-à-dire qui ne contient aucun autre sous-ensemble appartenant à M . »⁴

Toujours selon Dubreil, on peut démontrer l'équivalence de ces définitions, à condition de faire intervenir l'axiome du choix et donc l'idée d'ordre. Mais, l'ordre pouvant s'exprimer formellement à l'aide de la seule théorie des relations, on est en droit de conclure que le temps ne joue ici aucun rôle.

2. On pourrait tenter maintenant de donner une définition positive des ensembles finis. Couturat⁵ propose d'appeler fini tout ensemble tel que, si on numérote ses éléments on finisse par les obtenir tous « en partant de 0 par l'addition répétée de 1 ». Dubreil, dans la note déjà citée, considère comme fini tout ensemble non vide équivalent à un segment de l'ensemble des nombres naturels, ce qui revient seulement à expliciter l'opération de « numéroter ».

Il faut remarquer que cette façon de faire réintroduit implicitement le temps. Numéroter des éléments, en effet, consiste à les mettre un à un en correspondance avec les termes successifs de l'ensemble des nombres naturels. Il est vrai qu'une fois tous les éléments numérotés, le temps disparaît pour ne laisser que deux ensembles entre lesquels *existe* un certain type de relation. Mais ce ne sera plus le cas pour des ensembles

¹ *Théorie des fonctions*, Chap. I, p. 16.

² Traduit de FRAENKEL, *Einleitung in die Mengenlehre*, p. 18.

³ Déf. de Dedekind, rapportée par DUBREIL, *Algèbre*, t. I, Note I.

⁴ Déf. de Tarski, rapportée par DUBREIL, *ibid.*

⁵ *Les principes des mathématiques*, Chap. II, C, p. 62.

infinis. Ceux-ci se définissent par cette propriété qu'ils sont inépuisables. C'est alors la subsistance même du temps qui est la marque de l'infini : celui-ci étant de nouveau considéré en puissance. On rejoint ainsi la position des intuitionnistes pour qui « la supposition qu'on ait pu parcourir une suite infinie n'a pas de sens »¹, et qui considèrent les ensembles infinis « als etwas... ständig werdendes » selon l'expression de Fraenkel².

3. L'axiome du choix

Les ensembles actuellement infinis peuvent servir à leur tour d'éléments à de nouveaux ensembles. Il s'est avéré utile d'introduire pour eux un axiome que Zermelo énonce ainsi :

Si T est un ensemble donné d'ensembles $M, N, R, \dots$ « il est toujours possible de choisir de chaque élément $M, N, R, \dots$ appartenant à T , un élément particulier et de réunir tous ces éléments en un ensemble S »³.

L'axiome affirme donc la possibilité d'un choix dans le cas précisément où on ne sait pas faire ce choix. En d'autres termes, il pose l'existence d'un certain ensemble S dans le cas où il n'est pas possible de construire cet ensemble. La question de savoir si une telle affirmation a un sens a été longuement débattue dans un échange de lettres entre MM. Borel, Baire, Lebesgue et Hadamard. Les trois premiers savants y sont d'avis qu'un ensemble n'existe, c'est-à-dire ne peut entrer en considération, que pour autant qu'il est possible d'indiquer une loi qui puisse servir à construire ses éléments. Ainsi, dit E. Borel :

« Nous dirons qu'un ensemble est donné lorsque, par un moyen quelconque, on sait en déterminer tous les éléments les uns après les autres, sans en excepter un seul et sans répéter aucun d'eux plusieurs fois. »⁴

Dans ces conditions l'axiome du choix n'aurait de sens que si T était dénombrable. En effet :

« lorsque l'infinité de choix n'est pas dénombrable, il n'est pas possible de concevoir un moyen de la définir, c'est-à-dire de la distinguer d'une infinité analogue »⁵.

A quoi M. Lebesgue répond, d'accord ici avec M. Hadamard, que

¹ Weyl, cité sans référence par F. GONSETH, *Les fondements*, p. 200.

² *Op. cit.*, p. 168.

³ Math. Annalen, T. 65, p. 266. cité par SIERPINSKI, *Leçons sur les nombres transfinis*, p. 106.

⁴ *Leçons sur la théorie des fonctions*, Ch. I, p. 3.

⁵ *Op. cit.*, Note V, p. 161.

« la difficulté qu'il y a à parler d'une infinité de choix sans en donner la loi est aussi grave, qu'il s'agisse ou non d'une infinité dénombrable »¹.

M. Borel n'est toutefois pas convaincu car, s'il s'agit d'une infinité dénombrable

« on peut du moins indiquer une marche telle que, cette marche étant fixée d'avance, on soit assuré que l'un quelconque des choix sera effectué au bout d'un temps fini »².

M. Borel est donc ici d'avis que l'espèce d'extrapolation qui consiste à passer de la connaissance d'un nombre quelconque de termes à l'ensemble de *tous* les termes n'est légitime que si cette connaissance est effective. Autrement dit, ce point de vue consiste à légitimer toujours l'infini actuel par l'infini potentiel. Le temps demeure ainsi sous-jacent.

Sans doute cette discussion date-t-elle déjà³ et l'axiomatique de la théorie des ensembles est assez avancée aujourd'hui pour dispenser de pareilles questions. Elle met néanmoins en évidence qu'à un certain niveau de pensée l'infini potentiel et le devenir qu'il représente, ont servi de fondement à l'infini actuel, comme le temps a servi de fondement à la variable.

Conclusions

Lorsque le terme « infini » est appliqué à des quantités variables au sens du chapitre précédent, il fait appel à l'idée de temps. Celui-ci peut servir même à le caractériser, par opposition au fini, le fini étant ce qui est pensable comme atteint. En pratique cependant on se borne à considérer les quelques premiers termes des suites en s'assurant que rien n'empêcherait de continuer. L'idée d'indéfini, de quelconque se substitue ainsi à celle d'infini. Les expressions temporelles disparaissent, mais le temps reste virtuellement utile.

D'autre part le terme « infini » peut s'appliquer à des ensembles. Ceux-ci sont alors considérés comme des tous et ne se distinguent des ensembles finis que par certaines propriétés, comme celle-ci par exemple que, si n est le nombre cardinal d'un tel ensemble, on aura $n + 1 = n$. Tout ceci est légitime. Certains ensembles obéissent à — ou sont définis par — un système d'axiomes F, d'autres sont soumis à un système I. Les premiers sont appelés finis, les autres infinis. Il n'y a aucune raison pour que le système I offre plus de chances de contradiction que le système F. Le problème n'est pas là, mais dans certaines habitudes de pensée.

Dans le système F il est possible de donner un ensemble soit en

¹ *Op. cit.*, Note IV, Lettre de M. Lebesgue à M. Borel, p. 156.

² *Op. cit.*, Note V, p. 162.

³ Cet échange de lettres date de la fin de l'année 1904.

extension, soit en compréhension. Dans le premier cas on énumère *successivement* les éléments : on construit l'ensemble. Mais il vient un moment, d'ailleurs le plus souvent théorique, où cette énumération se termine. Toute idée de temps est superflue. On dit : « soit l'ensemble tel et tel ». Dans le second cas on donne une propriété commune aux éléments de l'ensemble, c'est-à-dire un critère permettant, pour tout objet, de déterminer s'il est ou non élément de l'ensemble. On ne construit pas véritablement l'ensemble, mais on se borne à classer les objets qui se présentent. Le temps ici n'intervient guère.

Dans le système I, on peut encore donner les ensembles en compréhension. Rien ne distingue dans leurs définitions un ensemble fini d'un ensemble infini. Si l'on dit : « soit l'ensemble des nombres divisibles par 2 », on ne se prononce pas encore sur la puissance de cet ensemble. Chaque fois qu'un nombre se présente, on lui applique le critère ce qui permet de le classer comme élément de l'ensemble ou non-élément. Maintenant, pour savoir s'il est infini, il faut le mettre en correspondance biunivoque soit avec un autre ensemble dont on sait qu'il est infini, soit avec un de ses sous-ensembles propres. On se rapproche ainsi du point de vue de l'extension. Ici l'ensemble est infini si l'énumération de ses éléments ne trouve pas de limite. Cette absence de bornes se marque par le mot « etc. » ou un équivalent. Ces expressions sont le signe d'un devenir plus ou moins explicite.

Toutefois, par analogie avec les ensembles finis et malgré l'inachèvement propre aux ensembles infinis, on a coutume de dire : « soit l'ensemble tel et tel ». L'expérience a fait voir qu'il pouvait éventuellement découler de cette façon de procéder quelques contradictions (Paradoxes de Cantor, de Richard, etc.). Cela explique qu'on ait alors songé à prendre au sérieux le « etc. » pour revenir, comme les intuitionistes, à l'idée de temps ou, comme E. Borel dans les textes cités, aux seuls cas où il serait possible d'y revenir.

Il n'en reste pas moins que la considération d'infinis actuels rejette explicitement tout usage du temps. La question qui se pose est donc de voir si ces infinis actuels suffisent à définir variable, limite et continuité ou si, à un moment donné, le temps se réintroduit subrepticement.

CHAPITRE V

VARIABLE, LIMITE ET CONTINUITÉ DU POINT DE VUE DE LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES ENSEMBLES

La possibilité de parler de *tous* les éléments d'un ensemble, que celui-ci soit fini ou infini, permet de donner de nouvelles définitions des notions de variable, de limite et de continuité. Celles-ci apparaîtront indépendantes de l'idée de temps.

1. La variable

Partons donc d'un ensemble, c'est-à-dire d'une classe dont les membres jouissent de certaines propriétés. Dans ces conditions, on appellera « élément variable » un symbole susceptible de représenter l'un quelconque des éléments de l'ensemble. Ainsi, selon Bourbaki par exemple :

« Une lettre peut désigner, soit un élément *déterminé*, soit un élément *arbitraire* (dit aussi *variable*, *argument* ou élément *générique*) d'un ensemble. » ¹

C'est encore ainsi que Euler, bien avant la théorie des ensembles, disait :

« Quantitas variabilis est quantitas indeterminata seu universalis, quae omnes omnino valores determinatos in se complectitur. » ²

La variable apparaît donc comme le représentant de quelque chose qui la précède logiquement : les éléments de l'ensemble. Reste à savoir comment ceux-ci sont connus.

Donnons-nous pour cela une « matrice » selon la terminologie de Quine ³, c'est-à-dire une expression de la forme « ax ». Mettons, par exemple, « x est un nombre premier ». Lorsqu'on dit alors : « k est un

¹ *Éléments de mathématiques*, Fascicule des résultats, p. 2.

² *Introductio in analysin infinitorum*, Cap. I, 2.

³ *Mathematical logic*, Chap. II, n° 14.

élément déterminé», on entend que la proposition « ak » est vraie. D'autre part lorsqu'on dit : « soit x un élément générique de l'ensemble $\hat{x}(ax)$ » on entend aussi que l'expression « ax » est vraie. Mais on affirme encore qu'elle est vraie pour tout $x \in \hat{x}(ax)$. La variable est donc telle qu'on peut la choisir sans être astreint à aucune autre restriction que celle de soutenir la relation « ε » avec l'ensemble. Au contraire l'élément déterminé est tel qu'il obéit encore à d'autres conditions. Par exemple k devra vérifier l'expression « bx » où « b » signifiera « être le suivant de 2 ».

On voit ainsi que les expressions équivalentes : x est indéterminé, x est arbitraire, pour tout x , quel que soit x , un x quelconque, x est un élément variable, etc. ne supposent aucune succession, mais simplement l'existence préalable d'un ensemble. Ainsi rien n'indique si l'ensemble est fini ou infini. Mais, dans le premier cas, une longue habitude de la manipulation des choses suggère une autre méthode qui elle est temporelle.

Au lieu de partir de l'ensemble, on part de ses éléments. L'ensemble est connu lorsqu'on a énuméré ses éléments et la variable est un signe commode pour représenter la succession des propositions : $ax_1, ax_2, ax_3, \dots$ Comme le dit Dubreil¹ :

C'est « la manière la plus simple, mais non toujours réalisable, de donner un ensemble. [Elle] consiste à désigner successivement et individuellement ses éléments ».

Jusqu'à quel point cette façon de procéder peut-elle s'étendre aux ensembles infinis ? Cette question renvoie à ce qui a déjà été dit au chapitre IV, à propos de la distinction entre infini potentiel et infini actuel. On retrouve notamment la position intuitioniste et les restrictions qu'elle comporte quant à une logique classique où figure une proposition du genre « $\vdash p \vee \bar{p}$ ». On rejoint aussi les remarques de E. Borel. Il semble en effet relativement aisé de commencer la construction d'un ensemble lorsqu'on sait que ses éléments sont dénombrables. Mais on ne voit guère comment imaginer un procédé déterminé pour construire un continu par exemple.

Les deux caractères de grandeur indéterminée et de suite indéfinie de valeurs n'ont d'ailleurs rien qui les rende incompatibles. Carnot l'avait déjà indiqué :

« Les quantités qu'on nomme variables ou indéterminées, sont celles auxquelles on est maître... d'attribuer successivement diverses valeurs. »²

Chaque fois que des considérations globales ne suffisent pas, on fait usage de cette possibilité et on imagine des valeurs qui se succèdent. Mais maintenant la succession n'est plus fondée sur le temps, elle est une conséquence des définitions qui précèdent. Il en est donc enfin de la variable comme il en était déjà de la fonction³.

¹ *Algèbre*, T. I., p. 1.

² *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, Chap. I, p. 17.

³ Cf. Ch. III, 2.

2. Les limites

La notion d'ensemble est donc le seul fondement de celle de variable. Il s'ensuit que les diverses sortes de limites sont aussi définies à partir des ensembles. Elles apparaissent comme des éléments particuliers jouissant de certaines propriétés déterminées.

Considérons, par exemple, les trois notions de *borne supérieure*, de *plus grande des limites* et de *point limite*. Pour cela, partons avec Goursat d'un ensemble de nombres quelconques (E). Alors, s'il existe un élément M de (E) tel que :

« 1° Il n'existe aucun nombre de (E) supérieur à M,

» 2° Quel que soit le nombre positif ε , il existe toujours un nombre de (E) plus grand que $M - \varepsilon$ »,

cet élément M est la borne supérieure de l'ensemble (E) ¹.

D'une manière analogue, s'il existe un élément L tel que :

« Il existe... toujours une infinité de nombres de l'ensemble (E) compris entre $L - \varepsilon$ et $L + \varepsilon$, tandis qu'il n'en existe qu'un nombre fini (ou zéro) qui soient plus grands que $L + \varepsilon$ »,

ce nombre L est la plus grande des limites des éléments de l'ensemble (E) ².

Enfin, la notion d'élément-limite se définira comme suit. Faisons correspondre à tout nombre élément de (E), un point situé sur un axe et dont l'abscisse est égale à ce nombre (Postulat de Cantor-Dedekind). Alors à tout ensemble de nombres (E) correspond un ensemble linéaire de points. Désignons-le encore par (E).

« Un point l est dit un point-limite, ou point d'accumulation... si, ε étant un nombre positif arbitraire, il existe toujours une infinité de points de l'ensemble entre $l - \varepsilon$ et $l + \varepsilon$. » ³

Ainsi les notions de limites, par opposition à celles de bornes, exigent la donnée préalable de totalités infinies parce qu'il est fait explicitement appel à des infinités de nombres. Toutes les valeurs, aussi bien celles de la variable que les valeurs-limites, étant données d'avance, tout devenir est superflu. Aussi peut-on constater la disparition des images temporelles au profit d'images spatiales : la borne, le point d'accumulation, être compris entre. Dans d'autres textes, on trouve encore : le voisinage, la distance :

« On appelle ensemble dérivé d'un ensemble donné des points tels que, dans le voisinage de chacun d'eux, se trouve une infinité de points de l'ensemble donné. » ⁴

¹ *Cours d'analyse*, p. 5.

² et ³ *Ibid.* p. 7.

⁴ BOREL, *Op. cit.*, Chap. III, I, p. 34.

« On dira qu'un point a' est un point-limite de l'ensemble A si, quelque petit que soit ε , il existe un point a distinct de a' et dont la distance à a' soit inférieure à ε . » ¹

Toutefois, comme on l'a déjà vu à propos de la variable, il n'est pas exclu de parler encore le langage du temps. Prenons par exemple la notion de borne supérieure. Soit M une telle borne pour un ensemble E infini. Cela signifie que, si on considère l'ensemble de tous les ε possibles, on peut choisir n'importe quel élément de cet ensemble et être assuré que, dans l'intervalle $M - \varepsilon$, on trouvera un élément de E . Il en découle qu'on peut, si l'on veut, *approcher* indéfiniment M par une suite d'éléments de E . C'est ainsi que Weber s'exprime :

« Die obere Grenze [d'un ensemble T] ist eine Zahl, die durch keine der Zahlen τ [$\tau \in T$] an Grösse übertroffen wird, der aber doch Zahlen τ bis auf jeden Grad nahe kommen. » ²

Une autre question s'introduit encore. Goursat a supposé que l'ensemble (E) était un ensemble de nombres, c'est-à-dire que ses éléments jouissaient des propriétés qui caractérisent les nombres. Cela n'est aucunement nécessaire ³. Dès qu'un élément jouit des propriétés ci-dessus, il est respectivement la borne, la plus grande des limites, un élément d'accumulation. Deux conditions sont toutefois requises :

1) Il faut que les définitions données aient un sens, notamment qu'on puisse parler de « plus grand » et de « plus petit ». Cette condition fera l'objet du chapitre suivant.

2) Il faut que ces éléments existent, ce qui n'est nullement toujours le cas, même si (E) est un ensemble de nombres.

Cette question de l'existence des limites n'a guère été soulevée avant Cauchy. Cela tenait sans doute à ce que, dans la plupart des cas, la limite était préalablement connue, mais aussi à ce que l'image d'une variable en devenir créait facilement l'illusion que c'était cette variable qui, par son devenir, donnait l'existence à la limite. Or on a vu plus haut ⁴ que, dans la perspective temporelle déjà, la limite d'une suite n'était pas une valeur de la suite et ceci parce qu'elle était inaccessible par définition. D'où lui vient alors son existence ? C'est ce que la notion de *coupure* fait voir avec précision.

Avoir pratiqué une coupure dans l'ensemble des nombres rationnels, c'est avoir effectué par un moyen quelconque, le partage des nombres rationnels en deux classes α et β telles que :

¹ *Ibid.*

² *Encyclopädie der elementaren Algebra und Analysis*, p. 75.

³ RUSSEL, *Philosophie des mathématiques*, Chap. X et XI et *Principia*, Vol. II, Part V.

⁴ Cf. Ch. IV, 1.

- (1) Tout nombre plus petit qu'un nombre de α appartient à α .
- (2) Tout nombre plus grand qu'un nombre de β appartient à β .
- (3) Il existe des couples de nombres $x \in \alpha$ et $y \in \beta$ tels que $y - x$ est arbitrairement petit.

Dans ces conditions quatre cas peuvent se présenter :

- (1) Il y a un seul nombre x qui n'est pas classé.
- (2) Il y a un élément de α plus grand que tous les autres éléments de α .
- (3) Il y a un élément de β plus petit que tous les autres éléments de β .
- (4) Tous les éléments sont classés, mais les cas (2) et (3) n'ont pas lieu.

Dans les trois premiers cas on a défini un élément de l'ensemble des nombres rationnels et dans le quatrième cas on a déterminé univoquement un nouvel élément.

Ainsi, non seulement les définitions des limites ne font aucune allusion au temps, mais les limites elles-mêmes sont constituées en dehors de tout devenir. Il est en effet possible, en appliquant la méthode des coupures, de démontrer l'existence d'éléments-limites. Partons pour cela d'un ensemble de nombres réels E borné supérieurement et pratiquons une coupure. On mettra dans β tous les nombres rationnels qui ne sont inférieurs qu'à un nombre fini d'éléments de E et dans α les nombres rationnels qui sont inférieurs à une infinité d'éléments de E . On montre facilement qu'on a défini une coupure et que celle-ci détermine la plus grande des limites au sens où il a été dit. On procéderait de façon analogue pour prouver l'existence des autres limites définies.

Il va toutefois de soi que le calcul numérique d'une valeur-limite peut conduire à une suite indéfinie d'opérations. Sans doute le rôle du temps est-il alors du domaine de la pratique, puisque l'existence de la limite est assurée d'avance par la coupure. Il ne faudrait cependant pas en minimiser l'importance. D'abord parce que de tels procédés d'approximation ont longtemps été les seuls dont le mathématicien disposait, ensuite parce que c'est grâce à eux que la construction abstraite trouve à « mordre » sur le monde concret.

Il reste enfin à voir ce qu'on appellera la limite d'une fonction. Rien de nouveau ne s'introduit au point de vue qui nous occupe. Voici, par exemple, la définition de Valiron :

« Soit Q un point d'accumulation de l'ensemble E . On dit que la fonction $f(P)$ tend vers une limite L lorsque P tend vers Q ... lorsque $f(P)$ est, pour $P \neq Q$, aussi voisin de L que l'on veut, pourvu que P soit suffisamment voisin de Q . »¹

¹ *Op. cit.*, p. 60.

Le verbe « tendre » n'est plus ici qu'une survivance, une façon commode de s'exprimer.

3. La continuité

Une fois définie l'expression « la fonction $f(P)$ tend vers une limite L , lorsque P tend vers Q », il est aisé de définir la continuité d'une fonction en un point.

« Une fonction $f(P)$, dit Valiron, définie sur un ensemble E [linéaire ou spatial] admettant l'un de ses points Q comme point d'accumulation est dite continue au point Q si $f(P)$ a une limite finie lorsque P tend vers Q et si cette limite est $f(Q)$. »¹

Ce texte montre que le rapport entre la limite et la continuité d'une fonction reste le même, que ces notions reposent ou non sur la théorie des ensembles. Le temps qui, au chapitre III déjà, ne jouait plus de rôle puisqu'on s'abstenait de considérer isolément la variable, ne s'introduit pas ici, malgré la survivance souvent constatée du verbe « tendre ».

Nous allons donc passer à la continuité de la variable indépendante et, encore que cette notion joue peut-être en mathématiques un rôle moins important que celle de fonction continue, nous allons nous y arrêter un peu. En effet, nous avons vu que le temps s'était fixé dans l'idée de variable plus que partout ailleurs. En particulier il a semblé longtemps à de bons esprits qu'il était impossible de parler de « variable continue » sans allusion à un devenir. On se souvient à ce propos du texte cité à la page 29 et dû à P. Du Bois Reymond.

Un passage de sa pensée doit être souligné ici. « La représentation de l'espace immobile et fixe ne fera jamais sortir *l'image*² d'une ligne véritablement uniforme. » L'auteur parle donc d'obtenir une *image* ce qui réclame :

1) Qu'il soit souhaitable et possible d'édifier les mathématiques sur un plan exactement parallèle à celui de l'expérience.

2) Que l'on sache préalablement et assez exactement ce qu'est la continuité, afin de la traduire fidèlement.

Aucune de ces conditions ne se trouve satisfaite au point où nous en sommes. Il est vrai que la considération d'ensembles infinis n'est pas en soi réfractaire à toute image. Les grains de sable d'une plage constituent bien un ensemble pratiquement infini, en ce sens que pour l'intuition $n + 1 = n$. Mais c'est plutôt la volonté profonde des mathématiciens contemporains qui vient s'inscrire à faux contre cette tendance. La multiplicité des géométries, celle même des logiques en sont des exemples.

¹ *Op. cit.*, p. 63.

² C'est moi qui souligne.

Dans ces conditions, il semble que rien n'empêche d'appeler « continu » n'importe quelle sorte d'ensembles : celui des nombres entiers par exemple. En fait il est remarquable que seules certaines espèces sont dites continues. Que cela ait pu tenir parfois encore à ce que l'image d'une variable qui prendrait successivement les valeurs 1, 2, 3, ... soit trop éloignée de celle d'un mobile qui parcourt une ligne, la chose est possible. Il est toutefois plus conforme à l'esprit des mathématiques axiomatisées de supposer que le principe directeur est la cohérence logique. Le critère serait donc, pour ce qui concerne la continuité, de constituer des ensembles tels

1. qu'une variable définie sur un tel ensemble puisse prendre des valeurs-limites, selon les définitions citées,

2. que les théorèmes les plus fréquents aient une généralité aussi grande que possible.

Il reste néanmoins qu'il est possible de considérer comme continus des ensembles jouissant de propriétés différentes. Nous en fournirons comme exemple les deux sortes de continuités que Russel introduit dans ses *Principia*¹ et qu'il appelle respectivement « continuité dedekinienne » et « continuité cantorienne ».

Rappelons d'abord quelques définitions utiles :

Relations sériales

$$*204.01 \quad \text{Ser} = R/I \cap \text{trans} \cap \text{connex} \quad \text{Df}$$

Un ensemble sur lequel on a défini une relation sériale sera donc totalement ordonné au sens de Bourbaki².

Relations dedekiniennes

$$*214.01 \quad \text{Ded} = \hat{P} \{ (\alpha) . \alpha \in C' \text{max}_P \cup C' \text{seq}_P \} \quad \text{Df}$$

Un ensemble sur lequel on a défini une relation dedekinienne est tel que toute classe d'éléments de cet ensemble a soit un maximum, soit un successeur immédiat dans l'ensemble. Autrement dit, chacun de ses sous-ensembles est borné au sens courant, soit que la borne lui appartienne (max) ou non (seq).

Relations compactes

$$*270.01 \quad \text{Comp} = \hat{P} (P \subset P^2) \quad \text{Df}$$

¹ Part V. Voir aussi son *Introduction à la philosophie mathématique*, Chap. X.

² Cf. Ch. VI, 3.

Un ensemble sur lequel on a défini une relation compacte sera « überall dicht » selon Cantor. Cela signifie qu'entre deux quelconques de ses éléments, il y en a encore un.

Classes médianes

$$*271.01 \quad \text{med} = \hat{\alpha} \hat{P} (\alpha \subset C'P. P \subset P \mid \alpha \mid P) \quad \text{Df}$$

Une classe, choisie dans un ensemble sur lequel on a défini une relation P sera médiane s'il y a un de ses éléments entre deux éléments quelconques de l'ensemble.

On voit d'ailleurs que si on a défini une relation compacte sur un ensemble, cet ensemble contient des classes médianes et réciproquement :

$$*271.18 \quad \vdash \quad C' \text{med} = \text{comp}$$

Ceci dit, Russel appelle « continu au sens de Dedekind » tout ensemble sur lequel on a défini une relation sériale, compacte et dedekinienne. Il appelle « continu au sens de Cantor » tout ensemble sur lequel on a défini une relation sériale, dedekinienne et qui contient une classe médiane dénombrable.

Sans doute ces deux définitions ne sont-elles pas très différentes l'une de l'autre. Cependant Russel démontre que : « Cantor's definition has the advantage (among others) that two series which are continuous in his sense are ordinally similar, which is not necessarily the case with series that are continuous in Dedekind's sense. »¹ De toutes façons ces exemples suffisent à montrer combien nous sommes loin ici du point de vue que nous rapportions plus haut de P. Du Bois Reymond. En particulier, et c'est ce qui importe pour nous, le temps a disparu et le rôle qu'il jouait est tenu, encore une fois, par la notion de totalités infinies.

Conclusions

La théorie des ensembles permet donc d'exprimer sans allusion au temps les notions fondamentales de variable, de limite et de continuité. Toutes trois étaient cependant apparues au stade précédent en étroite liaison avec l'idée de devenir. Un changement aussi profond s'accompagne nécessairement d'une modification importante du point de vue auquel on se place. Il ne s'agit plus maintenant de *traduire* des faits plus ou moins directement observables sur les choses, mais de les *construire* sur la base d'un minimum de données. Il apparaît que les notions d'ensemble, de relation et de quelconque y suffisent. Tout ce qui relevait du temps et qui se traduisait par des mots tels que « successivement », « augmenter », « cesser », « tendre » est remplacé par des classes de valeurs, des relations et des quantificateurs. Les valeurs individuelles d'une

¹ *Principia*, Vol. III, p. 218.

variable en devenir ont fait place à la considération de toutes les valeurs possibles.

Si l'on se demande alors d'où proviennent ces classes, il faut répondre qu'elles sont *données*. Il est remarquable, en effet, que toutes les définitions de ce chapitre commencent (ou devraient commencer) par « soit l'ensemble tel et tel ». Le temps est donc éliminé par une sorte de mise au passé. Les suites de nombres sont supposées achevées, comme on suppose qu'on est parvenu à répartir en classes les éléments d'un ensemble pour procéder à une coupure.

Ce qui précède ne signifie d'ailleurs pas qu'il soit impossible d'exprimer les mêmes faits à l'aide du temps. Si le « tout » est une conséquence du « tous » préalable, rien n'empêche d'étaler ce « tout » dans le temps. C'est même ce que l'on fait chaque fois qu'on désire connaître la valeur numérique d'une limite. Mais alors la valeur trouvée, celle à laquelle on s'arrête, apparaît comme une approximation de la valeur exacte, inaccessible.

Il faut remarquer cependant que nous avons dû supposer à maintes reprises que les ensembles auxquels nous avons affaire étaient des ensembles ordonnés. Est-il certain qu'une définition de l'ordre puisse se donner sans avoir recours au temps ? C'est ce que nous allons examiner dans le chapitre suivant.

CHAPITRE VI

LA NOTION D'ORDRE

1. Importance de l'idée d'ordre

L'idée générale d'ordre, c'est-à-dire l'idée saisie en dehors d'une discipline particulière, est indéfinissable. « On n'en peut donner, dit A. Lalande dans son *Vocabulaire de la Philosophie*, de définition qui la rende plus claire. »¹ Toutefois son usage dans le langage quotidien déjà permet d'en dégager quelques caractères.

Tout d'abord on ne peut parler d'ordre qu'à l'occasion d'au moins

¹ Article *Ordre*.

deux objets entre lesquels il constitue alors une sorte de lien. D'autre part cette relation n'est pas contenue dans les termes donnés : elle n'existe que dans des circonstances déterminées. Dire donc que des termes sont « rangés dans un certain ordre » c'est porter un jugement qui doit être contrôlé. En l'absence de définition plus précise qui permettrait de connaître les conditions générales de l'ordre, l'esprit effectue ce travail de contrôle en passant *successivement* les termes donnés en revue.

Il est vrai que cet acte temporel n'est qu'un moment de la vérification. L'ordre une fois constaté, il existe et cela une fois pour toutes. Ainsi lorsqu'on propose, comme dans certains tests, une suite de nombres dont le dernier est inconnu, la personne interrogée commence par parcourir la suite des yeux pour y déceler un ordre, qui n'est que la loi fixe qui va lui permettre de calculer le terme manquant.

Il semble donc, à première vue, que le temps sous la forme de la succession soit la condition préalable d'une conscience de l'ordre. Mais d'un autre point de vue la réciproque apparaît tout aussi exacte. L'étude de la mentalité enfantine a montré en effet que le temps, l'espace, l'objet, la cause, etc. ne sont pas des notions primitives, mais qu'elles résultent de longues élaborations¹. Or, ce qui est frappant, c'est que la description de l'acte le plus simple d'un bébé, nécessite déjà l'emploi de l'ordre. C'est ainsi, par exemple, que dans *La construction du réel chez l'enfant*, J. Piaget montre que le premier acte temporel est de disposer deux termes — qui ne sont d'ailleurs pas encore des « objets » — dans un certain ordre². C'est évidemment le psychologue qui parle. L'enfant ne sait pas qu'il s'agit d'un ordre, il se contente de « l'agir ».

De tels faits font comprendre cependant comment il est éventuellement possible de définir et le temps et l'espace par l'ordre, ainsi que le faisait Leibniz, par exemple.

« Tempus est ordo existendi eorum quae non sunt simul. » — « Spatium est ordo coexistendi seu ordo existendi inter ea quae sunt simul. »³

On est ainsi en présence d'un cercle, ou mieux d'une dialectique, qu'il faut préciser.

(a) Au point de vue psychologique, on vient de voir comment, pour exprimer la genèse du temps, il fallait parler d'un ordre et comment pour parler d'un ordre il fallait avoir une première connaissance du temps. Mais le vocabulaire est ici trompeur : l'« ordre » et le « temps » recouvrent des réalités différentes selon les cas. L'ordre par lequel le psychologue exprime certains actes de son sujet n'est que très peu élaboré. Ce n'est qu'une façon de distinguer deux gestes. Au contraire,

¹ Cf. les ouvrages de J. Piaget.

² *Op. cit.*, Ch. IV.

³ *Init. math.*, III.

l'ordre des moments du temps est une relation très complexe. De même le temps auquel il est fait allusion lorsque l'esprit parcourt une suite de termes est vague et peu précis tandis que le temps auquel aboutit le travail de l'enfant ira jusqu'au chronomètre et à la relativité.

(b) Au point de vue mathématique, qui importe surtout ici, on retrouve ce même couple temps-ordre. Montrons-le sur quelques exemples tirés d'auteurs récents.

E. Goursat, dans son *Cours d'analyse*, s'exprime ainsi à propos du calcul d'une intégrale double :

« Le calcul d'une intégrale double se ramène au calcul de deux intégrales simples prises successivement... On doit d'abord intégrer $f(x, y)$... »¹

Van der Waerden de son côté définit le produit *st* de deux transformations en ces termes :

« Unter dem *Produkt st* zweier Transformationen s, t wird verstanden diejenige Transformation, die entsteht, wenn man zuerst die Transformation t und dann auf die Bildelemente die Transformation s ausübt. »²

Il s'agit dans ces deux textes d'un ordre qui s'exprime complètement à l'aide du temps. Sans doute ces mêmes auteurs ne s'en contentent-ils pas. Ils utilisent par ailleurs des ordres abstraits du genre de ceux que nous étudions plus loin. Il n'est que plus frappant de les voir se servir tout de même du temps. Il y aurait là le signe d'un recours à une pensée, encore peu rigoureuse si l'on veut, mais nécessaire tout de même au pas suivant.

La chose est encore plus manifeste chez Bourbaki. Celui-ci définit la composition de deux applications f et g :

« L'application de E dans G [E et G sont deux ensembles distincts ou non] dont la valeur, en un élément quelconque x de E est $g(f(x))$, s'appelle l'application composée de g et f . »³

Mais il poursuit, en plus petits caractères et comme en note :

« L'ordre dans lequel on compose les applications f et g est... essentiel. »⁴

Le changement même de corps nous paraît le signe que l'explication complémentaire ne se situe pas exactement au même niveau que le texte précédent. Elle n'en est pas moins « essentielle ».

Cette dernière citation pose d'ailleurs un autre problème. Elle parle

¹ P. 301 et p. 303.

² *Moderne Algebra*, p. 17.

³ *Op. cit.*, Th. des ens., p. 11.

⁴ *Ibid*, p. 12.

d'ordre, mais pas de temps. Sommes-nous en droit, malgré l'absence de mots temporels qui nous servent de guide, de supposer ici un ordre temporel et ne pourrait-il pas s'agir tout aussi bien d'un ordre spatial ? Nous pensons toutefois qu'au niveau où se situe cette allusion à l'ordre, celui-ci, même spatial, reste sous-tendu par le temps. Il ne faut pas seulement écrire les applications, l'une à gauche, l'autre à droite, il faut les penser et cela non pas comme simultanées, mais comme successives.

D'autre part ce ne sont pas là les seules questions où l'ordre intervient en mathématiques. Aussi longtemps que les notions de « variable », de « limite », de « continuité » sont définies par l'intermédiaire d'un devenir la question de l'ordre ne se pose même pas. Toutes ces notions bénéficient de l'ordre du temps. Il en est encore de même dans les ensembles finis, c'est-à-dire dans les ensembles qu'on peut donner en extension par l'énumération de leurs éléments. Ainsi, dit Dubreil :

« Lorsqu'on donne un ensemble $E = \{ a, b, c, \dots \}$ en désignant successivement ses éléments, ceux-ci se trouvent rangés dans un certain ordre. »¹

Or cet ordre est celui de leur génération, c'est celui du temps.

Il est donc important d'analyser l'ordre temporel, afin de pouvoir ensuite le comparer à l'ordre abstrait défini par la théorie des ensembles.

2. L'ordre temporel

Remarquons d'abord que l'ordre temporel est préalable à la mesure du temps. J. de la Harpe a montré, dans son ouvrage sur le temps, comment à partir d'un temps simplement joué, d'autres temps s'élaboraient et que :

« le souci de métrique temporelle ne se... [manifeste] de façon évidente que lorsqu'on s'efforce d'harmoniser entre eux les divers rythmes temporels »².

D'ailleurs le temps du sens commun, qui nous intéresse ici, n'est pas un temps métrique. Quand il n'est pas, naturellement, le temps des horloges et des quais de gare. Mais, quand un homme qui a soif remplit un verre et le porte à ses lèvres, il accomplit une suite de gestes temporellement ordonnés sans qu'aucune idée de mesure ne les accompagne. On ne peut même pas dire qu'il s'agit d'*instants* qui se suivent. Il n'y a que des *événements* au sens où J. de la Harpe les définit :

« Tout ce qui arrive et donne lieu à un acte de conscience, pourvu qu'il soit distinct de tous les autres événements et par suite des actes de conscience les déterminant. »³

¹ *Op. cit.*, p. 2.

² *Genèse et mesure du temps*, p. 110.

³ *Ibid.*, Déf. 1, p. 115.

On est donc en présence de deux événements : un événement x , remplir le verre et un événement y , le porter à la bouche. Il arrive que ces deux actes, répétés dans les mêmes conditions, aient pour conséquence un apaisement de la soif. D'autres fois pas. Il faut donc conclure que, toutes autres circonstances étant identiques, les actes eux-mêmes, bien que pareils, peuvent différer. On dira que leur *ordre* n'est pas le même. L'ordre xy provoque le résultat souhaité, l'ordre yx ne le provoque pas. Ainsi, dire que des événements se précèdent c'est les *relier* les uns aux autres par la pensée en des séries temporelles : $x, y, z, \dots$ Et le temps apparaît comme une relation, dont les propriétés constituent l'ordre temporel.

L'étude de cette sorte de relation sera facilitée par les travaux de J. Piaget, surtout *Le développement de la notion de temps chez l'enfant* et par un article de N. Wiener, *A contribution to the theory of relative position*¹.

On peut, schématiquement, distinguer les points suivants :

(1) Constitution de séries $x, y, z, \dots$ à quoi correspond, sur le plan logique, la création d'une *relation* entre événements, que nous noterons « P ».

(2) Découverte par l'enfant que, dans certains cas, de Pxy et de Pyz , il résulte Pxz . Cela revient donc à établir la *transitivité* de la relation P.

« P » est donc telle que :

$$P^2 \subset P$$

ou encore $(x)(z) : (Ey) . Pxy \ \& \ Pyz . \rightarrow Pxz$

(3) Constatation qu'on n'a jamais, à la fois, Pxy et Pyx , en d'autres termes que la relation P est *asymétrique*, donc telle que :

$$P \dot{\cap} \check{P} = \dot{\wedge}$$

ou, en vertu de la proposition démontrée dans les *Principia* sous le numéro

$$\begin{aligned} *25.39 : \quad & \vdash R \dot{\cap} S = \dot{\wedge} . \leftrightarrow : (x)(y) . Rxy \rightarrow \bar{S}xy, \\ & (x)(y) . Pxy \rightarrow \bar{P}yx \end{aligned}$$

(4) Restent les cas où on ne peut affirmer ni Pyz ni Pzy . Comme y et z sont des événements, ils ont quelque caractère qui empêche de les identifier, ce qui n'arriverait pas avec des instants. Cela fait que la relation « P » jouit encore de la propriété suivante :

¹ Apud Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, XVII, 5, pp. 441-449 (1914).

Si x précède y , que z ne précède pas y , que y ne précède pas z mais que z précède w , alors x précède w , soit symboliquement :

$$(x)(w) : . (Ey)(Ez) : Pxy \& . \bar{P}zy \& \bar{P}yz . \& Pzw : \rightarrow P xw$$

ou
$$P = \hat{R} \{ R | \div R \div \check{R} | R \subset R \}$$

La relation « $\div R \div \check{R}$ », limitée au champ de R , joue un rôle important. C'est la relation de *simultanéité* que l'enfant découvre soit empiriquement lorsque deux événements coïncident dans l'espace, soit logiquement à partir de l'asymétrie de la relation « P ». Si l'on pose en effet :

$$S = (\div P \div \check{P}) \text{ limitée à } C'P$$

on aura
$$(x)(y) : . Sxy \rightarrow Syx . \& . Syx \rightarrow Sxy : \leftrightarrow . Sxy \leftrightarrow Syx$$

(5) Maintenant tout ce qui est nécessaire pour passer aux *instants* est constitué. Procédons, avec Russel, de la façon suivante¹ :

« Prenons un groupe d'événements, dont quelque couple que ce soit interfère. En sorte qu'il y a un moment, si court soit-il, où tous existent. S'il y a quelque autre événement simultanément à tous ceux-ci, ajoutons-le au groupe. Continuons, jusqu'à ce que nous ayons construit un groupe tel qu'aucun événement extérieur au groupe ne soit simultanément avec eux tous, mais que tous les événements intérieurs au groupe soient simultanés les uns avec les autres. Définissons ce groupe dans son ensemble, comme un instant. »

Cela revient à poser :

$$\text{inst} = \hat{\alpha} \{ \alpha = p' \overrightarrow{S''} \alpha \}$$

Une telle définition se justifie par des considérations génétiques et sociologiques. J. Piaget a en effet montré le rôle essentiel que jouaient les emboîtements, non seulement dans la genèse du temps, mais en général dans la constitution du monde. Son *Traité de logique*² est fondé sur ces constatations. D'autre part, J. de la Harpe conclut son étude du temps prémétrique en disant que le temps constitue « une série de classes temporelles emboîtées les unes dans les autres »³.

Dès lors, si l'on considère la relation « P » non plus sur une classe d'événements, mais sur une classe d'instants, elle jouit d'une nouvelle propriété que Russel nomme la *connectivité* (connected relation) :

$$(x)(y) : . x, y \in C'P . Jxy : \rightarrow . Pxy \vee Pyx$$

En effet, si deux instants sont simultanés ils sont, par rapport à la

¹ *Méthode scientifique en philosophie*, p. 96.

² A. Colin, 1949.

³ *Op. cit.*, p. 94.

relation P, identiques l'un à l'autre et il s'ensuit que, de deux instants différents, l'un précède nécessairement l'autre.

En résumé, l'ordre temporel apparaît à l'analyse sous deux espèces :

- A. Comme une relation *transitive* et *asymétrique* entre événements.
- B. Comme une relation *transitive*, *asymétrique* et *connexe* entre instants.

3. L'ordre mathématique

On a vu déjà, au chapitre précédent, l'importance de la relation « $<$ » ou de sa converse « $>$ ». C'est elle qui s'est substituée à la relation d'ordre temporel en ce sens que, pour bien des auteurs elle sert à définir l'ordre. Ainsi, selon E. Borel, un ensemble est ordonné si, pour deux quelconques de ses éléments a et b on peut établir une relation $a < b$ et que $a < b$ et $b < c$ entraînent $a < c$ ¹.

La relation d'ordre apparaît donc ici comme une relation simplement *transitive*, et c'est en effet à la fois la propriété qui se retrouve dans toutes les définitions de l'ordre et celle qui est la plus caractéristique du temps, celle qui se traduit par le sentiment de son écoulement. Mais la relation « $<$ » n'est pas seulement transitive. E. Borel, dans le passage cité, considère des ensembles de nombres. Or, au moment où l'on construit les diverses espèces de nombres on précise, sur chacune d'elles, la relation « $<$ ». En particulier, si $a \neq b$, on a soit $a < b$, soit $b < a$. C'est ainsi d'ailleurs que Dubreil explicite dans toute sa généralité la relation d'ordre :

« On donne le nom de *relation d'ordre*... à une relation qui possède les deux propriétés suivantes :

» 1. elle est transitive

» 2. pour chaque couple d'éléments a et b de E, on a l'une des trois propriétés
 $a < b$ $a = b$ $b < a$

à l'exclusion des deux autres. »²

Telle est l'idée d'ordre la plus souvent exprimée : van der Waerden³, Fraenkel⁴, Sierpinski⁵, Beth⁶, etc. Elle est d'ailleurs susceptible d'être formalisée dans le cadre d'une logique symbolique, ce qui est d'un grand intérêt pour la question des intuitions sous-jacentes. Selon Russel, par exemple⁷, on peut exprimer les choses de la façon suivante :

Une relation « P » sera dite *sériale* ou d'*ordre linéaire*, si

¹ *Leçons sur la théorie des fonctions*, Note IV, n° III.

² *Algèbre*, T. I., pp. 2-3.

³ *Moderne Algebra*, 1937.

⁴ *Einleitung in die Mengenlehre*, 1923.

⁵ *Leçons sur les nombres transfinis*, 1928.

⁶ *Les fondements logiques des mathématiques*, 1950.

⁷ *Principia* ; *Introduction à la philosophie mathématique*.

$$(1) P \subset J \quad \text{ou} \quad (1') P \cap \check{P} = \dot{\Lambda}$$

$$(2) P^2 \subset P$$

$$(3) (x)(y) : . x, y \in C'P . Jxy : \rightarrow . Pxy \vee Pyx$$

En d'autres termes toute relation qui est aliorrelative, transitive et connexe est une relation d'ordre. Il en est d'ailleurs de même si elle est asymétrique au lieu d'être aliorrelative. En effet, Russel a démontré sous le numéro *50.47 la proposition suivante :

$$\vdash R^2 \subset R . \rightarrow : R \subset J . \leftrightarrow . R \cap \check{R} = \dot{\Lambda}$$

Ce qui signifie que toute relation transitive et aliorrelative est équivalente à une relation asymétrique.

Le choix des caractères ci-dessus, plutôt que d'autres est une affaire de généralité dans les conséquences et de commodité. Parvenu à ce point de formalisme, on pourrait aussi bien définir l'ordre autrement. C'est d'ailleurs ce que fait Bourbaki :

« Une relation $\omega(x, y)$ entre deux éléments d'un ensemble E est une relation d'ordre si

» a) La relation « $\omega(x, y)$ et $\omega(y, z)$ » entraîne $\omega(x, z)$ (transitivité).

» b) La relation « $\omega(x, y)$ et $\omega(y, x)$ » est équivalente à « $x = y$ ».¹

La condition b) impliquant la réflexivité, on peut aussi dire qu'une relation est d'ordre si elle est transitive et réflexive.

Remarquons que cette façon de procéder ne définit qu'apparemment un ordre différent de celui étudié plus haut. En effet, la définition classique peut s'exemplifier par la relation « $<$ » et celle de Bourbaki par la relation « $\leq$ ». Dès lors, si $x \neq y$, la condition de Bourbaki :

$$(b) \quad (x)(y) : Pxy \& Pyx . \leftrightarrow Ixy$$

implique l'asymétrie.

En effet, on peut démontrer que :

$$\vdash p . q \leftrightarrow m : \bar{m} : . \rightarrow . p \rightarrow \bar{q}$$

ou en substituant : $p/Pxy, q/Pyx, m/Ixy$

$$\vdash Pxy . Pyx \leftrightarrow x = y . x \neq y : . \rightarrow . Pxy \rightarrow \bar{Pyx}$$

Or, les hypothèses (b) et Jxy donnent :

$$\vdash Pxy \rightarrow \bar{Pyx}$$

¹ *Éléments de mathématiques, Fascicule des résultats*, pp. 32-34.

Ou encore :

$$\vdash (x)(y) \cdot Pxy \rightarrow \bar{P}yx$$

Notons enfin que Bourbaki fait encore une distinction :

« Une partie X d'un ensemble E, ordonné par une relation « $x \leq y$ », est dite *totale* ment ordonnée par cette relation si, quel que soit $x \in X$, $y \in X$ on a $x \leq y$ ou $y \leq x$ (ou encore si on a, soit $x < y$, soit $x = y$, soit $x > y$, ces trois relations s'excluant mutuellement). » ¹

Cela revient à introduire la connexité et montre que si le choix d'une relation d'ordre reste théoriquement libre, pratiquement on se limite à des relations qui correspondent aux intuitions que l'on peut avoir de l'ordre linéaire.

Conclusions

Ce qui précède permet à la fois de schématiser le développement de la notion d'ordre et de préciser le rôle du temps.

A partir du sentiment vague que certains actes en « précèdent » d'autres, des séries se constituent à partir desquelles naissent les ordres temporel, spatial et causal. Il s'agit de relations, d'abord vécues, puis senties et enfin parlées.

Mais à mesure que ces relations se perfectionnent, qu'elles deviennent plus générales et plus efficaces, elles se précisent. En même temps, la nécessité se fait sentir de constituer des schémas abstraits qui permettent de les comprendre mieux. Ces schémas ne font, par eux-mêmes, aucun usage du temps. Ils doivent seulement rendre compte du temps, en partant d'autre chose. Cette autre chose est formée de tout un ensemble de conventions, dont quelques unes d'ailleurs sous-entendent une espèce d'ordre, mais un ordre beaucoup plus vague que celui qui va être construit. C'est l'ordre qui s'exprime en disant que x doit être écrit *avant* y ou à *gauche* de y . C'est lui qui subsiste dans les expressions : « x est l'*antécédent* de la relation R », « donnons-nous un ε quelconque, *puis* montrons que », « étant donné les hypothèses suivantes, on démontrera que (*futur*) », etc.

Au moment où de telles expressions figurent pour la première fois dans un exposé, elles ont un sens temporel. L'auteur doit se faire comprendre. Il explique donc à son lecteur ce qu'il doit faire, il le lui décrit : D'abord vous écrirez x , puis vous écrirez y . Ceci compris, on n'y revient pas. L'intuition temporelle n'a plus sa raison d'être.

S'il apparaît ainsi de façon assez certaine qu'une intuition d'ordre est d'abord nécessaire, on pourrait douter qu'il s'agisse véritablement de l'ordre temporel. En même temps que l'enfant apprend à ordonner

¹ *Op. cit.* p. 34.

des actions dans le temps, il apprend aussi à ordonner des objets dans l'espace. L'ordre linéaire jouit des mêmes propriétés que l'ordre temporel, et même celui-là sert généralement d'image à celui-ci. Mais à côté du vocabulaire qui, comme on l'a vu, porte encore la marque du temps, il faut remarquer que l'ordre est né du désir de réussir certaines actions et que la notion de cause et celle d'effet entrent aussi en jeu.

D'autre part, il ressort de ce qui précède que, l'ordre temporel une fois formalisé, il est exactement celui que la théorie des ensembles introduit abstraitement :

les événements sont ordonnés, au sens de Bourbaki

les instants sont totalement ordonnés, au sens de Bourbaki.

Ainsi le temps supportait toute une partie des mathématiques, car si l'ordre qu'il comportait n'était pas formalisé, il n'en existait pas moins. C'est ce qui explique qu'il ait suffi si longtemps. Il ne restait plus, une fois ses propriétés bien précisées, qu'à négliger l'intuition qu'on pouvait en avoir.

Tout cela constitue bien un processus dialectique. L'ordre du temps a servi à une première élaboration de l'analyse. Ensuite de quoi, cette analyse même a permis de définir l'ordre en général et celui du temps en particulier.

Notons pour finir que le plus souvent les mathématiciens ne définissent pas la relation d'ordre sur un ensemble quelconque. Ils se limitent volontiers à des ensembles de nombres et exemplifient la relation « P » par « $<$ » ou « $\leq$ ». Ceci, joint à l'importance que la notion de nombre a prise en analyse, notamment depuis les travaux de Tannery, nous conduit tout naturellement à examiner pour elle-même cette idée de nombre.

CHAPITRE VII

LES GÉNÉRALISATIONS DU NOMBRE

Les diverses espèces de nombres se définissent toutes à partir des nombres naturels qui les précèdent logiquement. Historiquement cependant, les nombres naturels furent les derniers à être définis en toute rigueur. C'est la raison pour laquelle leur étude a été renvoyée au chapitre suivant. D'autre part toutes les généralisations du nombre ne sont pas également intéressantes au point de vue du temps. Nous n'en retiendrons

que trois : les nombres rationnels, les nombres réels et les nombres complexes de la forme $a + ib$.

1. Les nombres rationnels (positifs)

La notion de fraction constitue la plus ancienne généralisation connue des nombres naturels. On trouve déjà des calculs de fractions dans le papyrus de Rhind, deux mille ans avant notre ère¹. Cela s'explique d'ailleurs facilement si l'on considère les opérations concrètes de mesure. Lorsqu'on reporte en effet une aune le long d'une droite, il arrive le plus souvent qu'elle n'y soit pas contenue un nombre exact de fois. Cela signifie que la longueur à mesurer est comprise entre n et $n + 1$ fois l'unité. L'expérience montre alors que, ce qui n'a pas réussi avec une certaine règle, réussit souvent avec une autre plus petite. Il est même commode de choisir comme sous-unité une partie connue de l'unité elle-même. On est ainsi conduit à mesurer avec la même règle et l'unité primitive et la longueur objet de la mensuration. On obtient donc deux nombres (a , b) dont le premier indique, par exemple, la longueur de la droite à mesurer et le second celle de la règle. Il s'ensuit que ce couple de nombres, noté généralement $\frac{a}{b}$, est à la fois le résultat d'une double mesure et l'indication des opérations effectuées. Ces opérations sont sans doute placées dans le temps, comme les reports successifs d'un même segment le long d'une ligne. Mais la fraction elle-même est le *résultat* d'opérations passées. Elle n'implique aucunement le temps.

Reste évidemment la question inverse. Étant donné une ligne, a-t-on le droit de lui faire correspondre dans tous les cas un symbole atemporel $\frac{a}{b}$? En d'autres termes peut-on garantir l'élimination du temps en ce sens que les opérations de report trouveront nécessairement leur aboutissement ? Deux réponses sont ici valables. L'une s'appuie sur l'expérience sensible pour affirmer que, quelle que soit la longueur à mesurer, il existe toujours un segment qui y soit exactement compris (au sens physique du terme). L'autre opère par voie décisive : ne seront considérées ici que les grandeurs *commensurables*. Dans les deux cas les opérations s'achèvent et le temps ne joue pas de rôle.

La notion ainsi obtenue peut d'ailleurs se généraliser encore. Voici comment, selon Tannery² :

« En désignant par a et par b des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires, on désigne par le symbole a/b le quotient (exact) de la division de a par b . »

Ce nouveau symbole représente un nombre dit rationnel et le temps n'a rien à y voir. Il est vrai que, si on cherche à effectuer la division, dans le cas mettons où a et b sont des nombres entiers, celle-ci ne se termine

¹ A. REY, *La science orientale avant les Grecs*.

² J. TANNERY, *Leçons d'arithmétique*, p. 175.

en général pas. Il serait faux toutefois d'y voir un signe temporel. Si la division est pratiquement interminable, en droit elle existe dans la totalité de ses opérations, sa valeur étant justement « a/b ». D'autre part toute fraction dont le développement ne se termine pas ne donne pas lieu à une suite quelconque de termes, mais à un développement *périodique*. On pourrait objecter certes que l'idée de période est liée à celle de temps et on n'aurait aucune peine à le montrer en citant, par exemple, la façon dont Tannery l'introduit. Il divise en effet 130 par 14 et écrit :

« On a trouvé comme dividendes partiels successifs 130, 40, 120, 80, 100, 20, 60, 40 ; à partir de ce dernier, qui a déjà été obtenu, il est clair que les opérations vont se reproduire exactement comme elles se sont produites à partir du moment où on a obtenu une première fois ce dividende partiel, c'est-à-dire qu'on retrouvera dans le même ordre les dividendes partiels... et ainsi de suite indéfiniment... A partir de ce moment, les opérations partielles se produiront *périodiquement* toujours les mêmes. » ¹

L'allusion au temps est bien évidente, mais on remarquera aussi qu'elle n'est faite que pour le nier. Exprimer en effet une période, c'est être capable de dégager une loi, c'est enlever au temps son caractère essentiel d'indétermination et d'inachèvement. Il reste cependant que nier le temps dans un certain domaine, donne à penser qu'ailleurs il peut jouer un rôle. Ceci apparaîtra au paragraphe suivant.

A un point de vue moins élémentaire on définit souvent les nombres rationnels par le procédé très général des couples. Voici comment Landau, par exemple, le présente ² :

On part de l'ensemble des nombres naturels, puis on envisage des couples de tels nombres (a, b) dans l'ordre où ils sont écrits. On pose alors que deux couples quelconques (a, b), (a', b') sont équivalents si et seulement si $ab' = a'b$. On considère enfin l'ensemble de tous les couples équivalents entre eux et on le note [a, b]. Une telle classe de couples est, par définition, un nombre rationnel. Il suffit alors de définir convenablement l'addition et la multiplication pour pouvoir montrer qu'on a défini les mêmes nombres que ceux envisagés plus haut.

Remarquons ici encore l'absence du temps. Le seul point où on peut en voir une trace est dans la condition initiale que les couples (a, b) soient ordonnés. Nous avons déjà vu ce qu'il fallait en penser ³. Disons enfin que l'ordination des nombres rationnels se ramène à celle, supposée connue, des nombres naturels. On dira que $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ si $ad > bc$.

On voit donc que, si on limite l'analyse des nombres rationnels à celle des nombres entiers, on ne rencontre nulle part essentiellement le temps.

¹ *Op. cit.*, p. 213.

² *Grundlagen der Analysis*, Ch. II.

³ Cf. Ch. VI, 1.

2. Les nombres irrationnels

On arrive à des conclusions différentes pour les nombres irrationnels. En effet, selon la remarque de Tannery :

« L'introduction de ces nouveaux éléments ne va pas sans difficulté, quelque marche que l'on adopte ; elle implique en effet la notion de l'*infini*, qui n'a joué jusqu'ici qu'un rôle secondaire. »¹

On peut donc s'attendre à retrouver à ce propos la double interprétation du concept d'infini, en infinis potentiel et actuel. Mais il y a plus encore.

Reprenons les opérations qui ont conduit aux nombres fractionnaires. Il pourrait advenir, théoriquement, que quelque longtemps qu'on les poursuive on ne parvienne pas à effectuer la mesure. La grandeur donnée serait alors, par définition, incommensurable avec l'unité. Il ne s'agit, à vrai dire, que d'une conception négative. En ce sens qu'on se borne à dire qu'une grandeur irrationnelle n'est ni un nombre entier, ni une fraction. On se trouve donc en face d'elle nanti d'une sorte de liberté. Il y a quelque condition qui manque pour qu'elle soit entièrement définie. C'est cette absence de détermination qui peut donner occasion au temps de jouer un rôle, et cela même en présence de l'infini actuel. C'est ce qui apparaît lorsqu'on définit les nombres irrationnels par les *fractions continues* ou par les *suites libres*.

Partons avec Valiron² d'un nombre rationnel α . Il peut s'écrire $\alpha = \frac{p}{q}$ où on suppose que $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible. Alors si α n'est pas entier et que u_0 soit sa partie entière, on a :

$$(1) \quad \alpha = u_0 + \frac{1}{\alpha_1} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \frac{q}{q_1} \quad (q_1 < q)$$

Donc encore

$$(1') \quad p = u_0 q + q_1$$

Répétant le même raisonnement avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ on arrive, au bout de n opérations à :

$$(n) \quad \alpha_{n-1} = u_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n} \quad \text{avec} \quad \alpha_n = \frac{q_{n-1}}{q_n} \quad (q_n < q_{n-1})$$

et donc à

$$(n') \quad q_{n-2} = u_{n-1} q_{n-1} + q_n$$

Valiron dit alors :

« Dans ce cas de α rationnel, q sera égal à 1 pour une valeur n au plus égale

¹ *Op. cit.*, p. 379.

² *Théorie des fonctions*, pp. 17 sq.

à q et l'opération sera terminée ; on voit sur $[(1'), \dots (n')]$ que les entiers $u_0, u_1, \dots u_{n-1}$ sont les quotients successifs que l'on obtient dans la recherche du plus grand commun dénominateur de p et q . »¹

Et il ajoute :

« Si α est irrationnel, l'opération peut être poursuivie indéfiniment. »¹

On a donc ainsi des opérations *successives* dont on n'arrive pas au bout. Et ceci s'oppose nettement à ce qui se passe pour α rationnel. Alors en effet, et bien que les opérations décrites soient successives selon le terme même de Valiron, la valeur de ce temps est nulle. Lorsque α est sous la forme $\alpha = (u_0, u_1, \dots u_n)$ les opérations sont effectuées et la pensée n'a plus que faire du devenir. Mais il en est tout autrement si α est irrationnel, puisque par définition α ne jouit de cette propriété que s'il n'est pas rationnel, c'est-à-dire ici si la suite des opérations se poursuit.

Ce temps peut-il être remplacé par autre chose ? Sans doute, par la limite qui, on l'a vu, peut être conçue en dehors de lui. Et Valiron montre en effet, que la suite des fractions $(u_0, u_1), (u_0, u_1, u_2), \dots (u_0, u_1, \dots u_n)$ tend vers une limite lorsque n tend vers l'infini, cette limite étant le nombre irrationnel α . Toutefois Valiron poursuit de la façon suivante :

« On voit en outre que si l'on se donne *a priori* une suite infinie d'entiers positifs $u_0, u_1, \dots u_n, u_0$ pouvant seul être nul, les fractions

$$\frac{P}{Q} = (u_0, u_1, \dots u_n)$$

formées à partir de ces nombres convergent vers un nombre irrationnel positif α dont le développement en fractions continues est $(u_0, u_1, \dots u_n, \dots)$. »²

On est ainsi placé devant un cas fort intéressant pour le temps. Il faut se donner « une suite infinie d'entiers ». Cela n'est possible, d'une façon déterminée, qu'en fournissant le terme général et alors, comme pour le développement périodique, le temps n'a rien à faire. Mais en même temps *le nombre α obtenu n'est plus irrationnel*. C'est pourquoi, si l'on veut s'en tenir à cette méthode, faute de pouvoir donner un ensemble infini en extension, on est conduit à l'imaginer en devenir³.

Notons en passant que c'est la même pensée qui domine la conception intuitioniste du continu, telle que l'expose W. Beth⁴.

Soit à construire l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1. On part d'une suite actuellement infinie de nombres rationnels :

$$0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{3}{16} \quad \dots$$

¹ *Op. cit.*, p. 18.

² *Ibid.*, p. 20.

³ Il reste évidemment qu'on peut donner l'ensemble $(u_0, u_1, \dots u_n, \dots)$ en compréhension.

⁴ *Les fondements des mathématiques*, L. IV, Ch. III.

Il s'agit ici d'un ensemble ordonné dénombrable. Le temps n'a rien à y faire. Mais, dit W. Beth :

« On engendre un nombre réel quelconque en attribuant librement à toute fraction duale que l'on rencontre lorsqu'on parcourt la suite indiquée, l'un ou l'autre des prédicats *gauche* ou *droit*, sans toutefois violer l'ordre naturel des nombres rationnels. »¹

La présence des verbes « engendrer » et « parcourir » montre déjà que le point de vue a changé. Mais supposons encore qu'on veuille limiter un peu la liberté d'attribution des prédicats. Cela se peut. Cependant :

« Il faut qu'elle [la restriction] permette toujours de continuer une suite de choix permis une fois commencée. »²

Le temps est essentiel : le supprimer reviendrait à supprimer aussi le nombre irrationnel qu'on se propose d'engendrer. On ne parvient en effet à dépasser le concept de nombre rationnel, qu'à la condition de répéter indéfiniment et librement un certain processus.

Il existe toutefois des procédés uniquement atemporels et dans les quels, une fois encore, le temps est remplacé par l'infini actuel.

Il y a d'abord la *méthode des coupures*. Elle consiste en ceci qu'on suppose *tous* les nombres rationnels actuellement répartis en deux catégories qui jouissent de deux propriétés :

I. « Il y a des nombres dans chaque catégorie ; la première contient des nombres autres que zéro, et chaque nombre de cette catégorie est plus petit que chaque nombre de la seconde.

II. » Dans la première catégorie, il n'y a pas de nombre plus grand que tous les autres nombres de la même catégorie ; dans la seconde catégorie, il n'y a pas de nombre plus petit que tous les autres. »³

On a déjà vu au chapitre V que l'idée de coupure n'impliquait pas le temps. Il n'est pas nécessaire d'y revenir. Notons seulement que la définition de l'égalité de deux nombres irrationnels ainsi définis fait, elle aussi, usage d'infinis actuels. En effet, $A = B$

« si les nombres rationnels plus petits que A sont les mêmes que les nombres rationnels plus petits que B, et si les nombres rationnels plus grands que A sont les mêmes que les nombres rationnels plus grands que B »⁴.

Maintenant, si l'une de ces conditions n'est pas remplie, alors $A < B$ ou $A > B$. La relation d'ordre s'introduit sans apporter rien de nouveau à l'étude du temps.

La méthode des coupures repose donc sur une répartition en classes,

¹ *Op. cit.*, p. 146.

² *Ibid.*, p. 147.

³ J. TANNERY, *Op. cit.*, p. 381.

⁴ J. TANNERY, *Op. cit.*, p. 383.

mais il n'est dit nulle part comment la réaliser ni même comment l'entreprendre. A vrai dire cette question touche à un autre domaine, aux calculs d'approximations. Ces approximations seront nécessairement successives, chaque valeur s'appuyant sur la valeur qui la précède immédiatement. Mais, comme on l'a déjà noté, la succession a perdu ici son caractère d'efficacité. Ce nombre, que chaque décimale nouvelle apprend à mieux connaître, existe par ailleurs, indépendamment de la connaissance numérique que l'on en prend. Il n'est que la limite intemporelle de la suite des approximations.

On pourra donc aussi définir les nombres réels par l'intermédiaire des limites et cela sans faire usage du temps. C'est la *méthode des suites fondamentales*. En voici le principe, selon Van der Waerden ¹:

On part d'une suite infinie de nombres rationnels $(a_n) = a_1, a_2, a_3, \dots$

Si, à tout nombre positif rationnel ε , on peut faire correspondre un nombre naturel $n = n(\varepsilon)$ tel que

$$|a_p - a_q| < \varepsilon \text{ dès que } p > n \text{ et } q > n$$

on dit que la suite (a_n) est une suite fondamentale. De plus une telle suite est dite nulle si $|a_p| < \varepsilon$ dès que $p > n$.

On démontre alors que

1) L'ensemble des suites fondamentales est un anneau commutatif $\mathfrak{D}$. Cela signifie que la somme et le produit de deux suites fondamentales est une suite fondamentale. D'autre part cela implique que l'addition et la multiplication sont associatives, commutatives et distributives l'une par rapport à l'autre. Enfin la soustraction est toujours possible.

2) L'ensemble des suites nulles $\mathfrak{N}$ forme un idéal dans l'anneau $\mathfrak{D}$. En d'autres termes, si $(a_n) \in \mathfrak{N}$ et si $(b_n) \in \mathfrak{N}$ alors $(a_n - b_n) \in \mathfrak{N}$. De plus si $(a_n) \in \mathfrak{N}$ et $(b_n) \in \mathfrak{D}$ alors $(a_n)(b_n) \in \mathfrak{N}$.

3) L'ensemble des classes de restes $\mathfrak{D}/\mathfrak{N}$ est un corps Ω .

Tout cela revient à considérer comme équivalentes deux suites fondamentales si, et seulement si, leur différence est une suite nulle. Alors toute classe de suites fondamentales équivalentes $[(a_n)]$ est un nombre réel.

« Eine reelle Zahl ist also in dieser Theorie definiert als eine Restklasse modulo $\mathfrak{N}$ im Bereich der Fundamentalfolgen aus rationalen Zahlen. » ²

On voit par là que le temps ne figure nulle part. Mais on peut aussi noter que cette façon de procéder correspond au désir de construire des

¹ *Moderne Algebra*, paragraphe 67.

² *Op. cit.*, p. 217.

ensembles et non pas de déterminer tel ou tel nombre isolé. On verra dans le chapitre suivant que ce pourrait bien être là une exigence due au rejet du temps.

3. Les nombres complexes

La définition des nombres complexes ne fait aucun usage du temps. On pouvait d'ailleurs s'y attendre. En effet, ils sont généralement exposés par la méthode des couples. Comme on suppose pour cela que l'ensemble des nombres réels est donné, on ne revient pas sur les difficultés que l'infini pourrait soulever. D'autre part leur introduction systématique est assez tardive (Cauchy, Gauss, Hamilton). Cela signifie que l'analyse était déjà suffisamment éloignée de ses origines intuitives pour qu'on pût songer à les présenter de façon relativement abstraite. Vérifions-le néanmoins en examinant les trois mémoires où Cauchy introduit la notion nouvelle et qui offrent trois procédés différents :

1) Dans le *Mémoire sur les fonctions de variables imaginaires*¹, Cauchy ne voit dans une expression imaginaire que « la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles ». Celles-ci doivent être pensées simultanément. En lieu et place par exemple du système $x = a$ et $y = b$, on écrira $x + iy = a + ib$. Il n'importe aucunement de penser d'abord à x puis à y ou inversement. Il suffit d'associer correctement x avec a et y avec b .

2) Trois ans plus tard, Cauchy reprend la question dans son *Mémoire sur la théorie des équivalences algébriques*². Son désir est essentiellement de faire voir comment il est possible de parvenir à des résultats « très réels » tout en utilisant des « imaginaires ».

Il part pour cela d'une fonction de la variable réelle x , développée selon l'expression :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Il montre ensuite qu'on a toujours :

$$f(x) = A + Bx \quad \text{mod } (x^2 + 1)$$

On pourra donc substituer partout -1 à x^2 . Dès lors si on écrit i à la place de x , on aura :

$$\begin{array}{ll} i^{4n-2} \equiv -1 & i^{4n-1} \equiv i \\ i^{4n} \equiv 1 & i^{4n+1} \equiv -i \end{array}$$

¹ *Exercices d'analyse*, T. III, pp. 361 sq.

² *Exercices d'analyse*, T. IV, pp. 87 sq.

Ainsi « nous transformerons ce qu'on appelait une *équation imaginaire* en une équivalence algébrique, relative à la variable i et au diviseur $i^2 + 1$ ».

Ici encore le temps n'a rien à faire. La fonction $f(x)$ est supposée déjà développée jusqu'à l'infini et la substitution de -1 à x^2 est envisagée simultanément à chaque place.

3. C'est dans le *Mémoire sur les quantités géométriques*¹ que Cauchy met le point final à ses considérations sur les imaginaires. Il part cette fois-ci d'intuitions spatiales.

Soit un axe OR dans un plan. Tout point A du plan est alors bien défini par l'expression r_p , si l'on convient de poser

$$r = \overrightarrow{OA} \quad \text{et} \quad p = \sphericalangle ROA.$$

« Cela posé, la notion de quantité géométrique $[r_p]$ comprendra, comme cas particuliers, la notion de *quantité algébrique*, positive $[r_o]$ ou *négative* $[r_\pi]$ et, à plus forte raison, la notion de *quantité arithmétique* ou de *nombre*. »

Une fois encore le temps ne figure pas et notre affirmation se trouve justifiée.

Conclusions

Un aspect du temps, plusieurs fois entrevu déjà, se précise au cours de ce chapitre. Il s'agit du rôle qu'il joue dans la construction de certains êtres mathématiques.

Prenons l'exemple des fractions. Une fraction est d'abord le résultat d'un certain nombre d'opérations successives. Ce sont ces opérations, partage d'un segment unité en 2, en 3, en 4, etc., report de ces sous-unités 1 fois, 2 fois, 3 fois, etc., qui donnent son existence à la fraction. Ici le temps intervient en son sens le plus courant, d'avant et d'après, de passé et de futur. Mais son utilité n'est qu'éphémère. Lorsqu'on mesure une grandeur commensurable, le processus de mensuration a une fin, garantie par les hypothèses du problème. Et c'est cette garantie qui dévalorise le temps. On est certain qu'un moment viendra où la pensée pourra considérer son travail générateur dans son achèvement. Peu importe alors comment on est parvenu à « $\frac{a}{b}$ ». Ce qui précède n'est plus qu'une complication. On prend donc « $\frac{a}{b}$ » comme nouveau point de départ.

Ce n'est d'ailleurs pas tout. Si on se contentait en effet de partir de « $\frac{a}{b}$ » pour construire autre chose, on risquerait, à ce second niveau, de faire une fois encore usage du temps. Mais un changement fondamental s'opère ici. En même temps qu'on décide d'ignorer les efforts qui ont conduit à « $\frac{a}{b}$ », on renonce encore à considérer les fractions

¹ *Exercices d'analyse*, T. IV, pp. 157 sq.

comme individus. On part de leur ensemble tout entier et, par l'usage des classes de couples, par exemple, on étudie les seules propriétés qui sont communes à tous les éléments, c'est-à-dire en somme, les propriétés de l'ensemble des nombres rationnels. Une théorie des ensembles se substitue à une théorie des individus.

Passons maintenant aux nombres irrationnels. Les constructions que l'on peut imaginer de l'un d'eux en particulier, ne connaissent pas, par définition, cet achèvement dont nous venons de parler. La construction prend alors sa pleine valeur : on ne peut penser à elle que comme à un devenir, qui d'ailleurs comporte des degrés. Pour s'en rendre compte, imaginons un esprit analogue au nôtre quoique illimité dans la durée. Et supposons qu'il ait à donner des nombres en fournissant leur développement décimal. Quatre cas au moins peuvent se présenter, qui vont de la plus extrême liberté de choix à la détermination totale par laquelle on rejoint les constructions finies.

(1) On peut donner les décimales sans qu'il soit possible de prédire qu'elle sera la $(n + 1)^e$ si on connaît les n précédentes. Chaque chiffre a la même probabilité de $\frac{1}{10}$ de figurer à la n^e place. Une certaine idée du temps, qui contient essentiellement la notion de futur, c'est-à-dire d'un *inconnu* à venir, est ici indéniable. Dans ces conditions, le nombre défini est un nombre irrationnel.

(2) Considérons maintenant un nombre donné par un développement de la forme suivante :

c, ababbabbbbabbba...

Ici on peut affirmer que toute décimale de rang $k = \frac{n(n+1)}{2}$ où $n = 2, 3, 4, \dots$ est un *a* tandis que toutes les autres décimales sont des *b*. Et toutefois le nombre ci-dessus est un nombre irrationnel. Le temps y figure-t-il encore ? On peut répondre qu'il ne joue en tous cas pas un rôle aussi manifeste que sous (1). Et cependant, il est difficile de nier son utilité. Si le chiffre de rang $(n + 1)$ est en effet complètement déterminé, l'ensemble des n décimales précédentes ne constitue pas une période. Cela signifie que chaque « tranche » diffère de la précédente et qu'en conséquence le futur n'est pas complètement identique au passé.

(3) Au contraire, si à partir d'un certain rang les décimales constituent une période, alors tout est accompli. Aussi loin que la pensée poursuive son investigation, elle ne rencontre jamais qu'une copie du passé. Et véritablement ce n'est plus un temps que celui pour lequel passé et futur se confondraient. Il suffit de connaître la période, pour avoir une vision *simultanée* de l'ensemble dans sa totalité. Ceci est l'exact contre-pied du numéro (1).

(4) Enfin on pourrait limiter le développement à la n^e décimale, ce

qui n'introduit rien de neuf au point de vue du temps. Il est d'ailleurs techniquement possible de ramener ce cas au troisième. On convient pour cela de diminuer la n^e décimale d'une unité et de la faire suivre d'une suite illimitée de 9.

Une certaine idée de temps subsisterait donc dans les nombres irrationnels si une décision explicite de l'ignorer n'intervenait pas. Pour cela on fait usage d'une coupure, c'est-à-dire qu'on *pose* que *tous* les nombres rationnels sont classés ; ou bien on considère *toutes* les suites fondamentales équivalentes entre elles. On traite ainsi, par voie décisive, l'infini comme le fini et dès lors toute démarche temporelle pour calculer un nombre irrationnel précis n'apparaît plus que comme une application de la théorie.

CHAPITRE VIII

LES NOMBRES NATURELS

On a vu au chapitre précédent que les nombres réels et les nombres complexes se ramenaient aux nombres naturels.

Remarquons tout de suite que deux points de vue sont possibles. Les nombres finis se présentent en effet sous un double aspect : ils sont à la fois *ordinaux* et *cardinaux*. On peut dès lors partir de l'idée de rang et en déduire celle de nombre. Mais on pourrait aussi, l'idée de nombre une fois posée, en tirer celle de rang. Nous appellerons avec Couturat ¹ théorie ordinale la première et théorie cardinale la seconde.

1. Théorie ordinale

Elle fut exposée entre autres par v. Helmholtz ² et par Hamilton ³ et elle s'appuie très largement sur l'intuition du temps.

¹ *Les Principes des mathématiques*, Chap. II.

² *Zählen und Messen*.

³ *Lectures on Quaternions*, Preface.

Aristote avait déjà noté une parenté entre les idées de nombre et de temps dans sa fameuse définition :

« Le temps est le nombre du mouvement selon l'antérieur-postérieur. »¹

Il s'agit là d'une formule difficile à saisir et qui devrait, en tous cas, être replacée dans le contexte. Toutefois il suffira ici de noter la liaison entre les trois idées de « temps », de « nombre » et de « relation avant-après » que nous allons retrouver tout au long de ce paragraphe.

Par ailleurs Kant a fait une tentative pour subordonner complètement le nombre au temps, celui-ci n'étant que la forme intuitive de celui-là.

« Le schème pur de la quantité (*quantitas*) considérée comme concept de l'entendement est le *nombre*, lequel est une représentation embrassant l'addition successive de l'unité à l'unité (homogène à la première). Le nombre n'est donc pas autre chose que l'unité de la synthèse que j'opère entre les divers éléments d'une intuition homogène en général, en introduisant le temps lui-même dans l'appréhension de l'intuition. »²

Notre problème n'est d'ailleurs pas de savoir si le nombre est, ou n'est pas, philosophiquement parlant, réductible au temps, mais seulement de montrer à quoi sert le temps dans les exposés qui l'utilisent.

Considérons donc des objets, concrets ou non, et faisons abstraction de leurs différences pour n'en retenir qu'une : l'ordre dans lequel ils sont appréhendés par la conscience. Cela signifie que nous considérons cet élément, puis celui-ci et celui-ci, tout en gardant à la mémoire les éléments déjà considérés. Nous procédons alors à un *dénombrement* selon v. Helmholtz :

« Das Zählen ist ein Verfahren, welches darauf beruht, dass wir uns im Stande finden, die Reihenfolge, in der Bewusstseinsacte zeitlich nacheinander eingetreten sind, im Gedächtnis zu behalten. »³

Il est vrai que ceci ne fournit pas encore des nombres, mais seulement une suite ordonnée d'événements, simultanément présents dans la conscience. C'est d'ailleurs leur ordre seul qui permet de les distinguer les uns des autres : le n° diffère du $(n + 1)^{\circ}$ en ceci seulement qu'il le précède immédiatement. Il s'agit là d'une distinction fort naturelle, puisque L. Brunschvicg, dans les *Etapas de la philosophie mathématique*⁴, rapporte que certaines tribus de Malaisie et de Madagascar donnent à leurs enfants des noms qui caractérisent leur ordre d'arrivée au monde.

Il nous est ensuite facile de passer de là à l'idée de nombre. Selon v. Helmholtz toujours :

¹ *Phys.* IV, 11, 219a.

² *Critique de la raison pure*, *Anal. Transc.*, L. II, trad. Barni, p. 174.

³ *Op. cit.*, p. 360.

⁴ Livre I, Chap. I.

« Die Zahlen dürfen wir zunächst als eine Reihe willkürlich gewählter Zeichen betrachten, für welche nur eine bestimmte Art des Aufeinanderfolgens als die gesetzmässige, oder nach gewöhnlicher Ausdrucksweise « natürliche » von uns festgehalten wird. » ¹

Ainsi les signes « un », « deux », « trois », etc. sont les nombres. Ils ne font que nommer chacun des actes de conscience successifs du dénombrement. Leur propriété caractéristique est d'être rangés dans un ordre déterminé, c'est-à-dire tel que, si on donne deux nombres, on peut dire lequel est « antérieur » à l'autre. Le mot « antérieur » est généralement remplacé par l'expression « plus petit que ». Toutefois, dans cette perspective, l'expression ne prend de sens que par le temps. C'est qu'en effet la relation « $x < y$ » a un caractère d'irréversibilité qui l'apparente immédiatement à la relation « x précède y » et que ne possède pas, à un même degré, la relation « x est à gauche de y » par exemple. S'il suffit d'une rotation de π pour transformer la relation « à gauche » en la relation « à droite », on ne saurait imaginer aussi aisément une manipulation qui fasse passer de « $x < y$ » à « $x > y$ ». C'est ce que v. Helmholtz notait de la façon suivante :

« In der Zahlenreihe sind Vorwärtsschreiten und Rückwärtsschreiten nicht gleichwertige, sondern wesentlich verschiedene Vorgänge, wie die Folge der Wahrnehmungen in der Zeit, während bei Linien, die im Raume dauernd und ohne Änderung in der Zeit bestehen, keine der beiden möglichen Richtungen des Fortschreitens vor der andern ausgezeichnet ist. » ²

On peut donc dire que dénombrer une collection d'objets, c'est attribuer à chacun d'eux un ordre de succession. C'est en ce sens qu'il faut entendre la déclaration suivante de Hamilton :

« I do not find myself able to frame a distinct *conception* of *numbers*, without *some* reference to the thought of *time*... I cannot fancy myself as *counting* any set of things, without first *ordering* them, and treating them as successive. » ³

Ce qui précède décrit, en la précisant, l'idée de suite de nombres naturels. Dès lors deux nombres seront égaux s'ils ont même rang dans la suite. L'opération fondamentale « ajouter 1 » consiste à remplacer un nombre par celui qui le suit immédiatement :

« Wenn ich, dit v. Helmholtz, irgendeine Zahl mit einem Buchstaben, z. B. a bezeichnet habe, will ich die in der normalen Reihe darauf folgende mit $(a + 1)$ bezeichnen. » ⁴

Et alors, d'une façon plus générale :

¹ *Op. cit.*, p. 360.

² *Op. cit.*, p. 361.

³ *Lectures*, p. 15.

⁴ *Op. cit.*, p. 362.

« Ich bezeichne als $(a + b)$ diejenige Zahl der Hauptreihe, auf welche ich stosse, wenn ich bei $(a + 1)$ eins, bei $[(a + 1) + 1]$ zwei, usw. zähle, bis ich b gezählt habe. » ¹

Ainsi ajouter b à a , c'est avancer de b pas successifs dans la suite naturelle des nombres.

Jusqu'à maintenant seul l'aspect ordinal a été envisagé. Mais il vient un moment où le dénombrement s'arrête : celui où le dernier objet de la collection a trouvé son rang. Alors le caractère ordinal des nombres s'efface au profit de l'aspect cardinal du dernier d'entre eux. On pourrait dire : premier et deuxième et troisième, etc. et n^e , cela fait n objets. Les objets sont comptés. *Il y en a n*. On considère alors la collection comme un tout et le nombre de ses constituants apparaît comme une de ses propriétés.

Ces deux moments de la pensée, parallèles d'ailleurs à des actions concrètes ², se retrouvent dans certains systèmes de notation anciens. L'exemple suivant le montrera. Selon M. Cantor ³, les Chaldéens notaient de façon différente les nombres plus petits que 100 et ceux plus grands que 100. Par exemple 23 se serait écrit :

$$\begin{array}{r} 10 \\ 10 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array} \quad 1 \quad \text{soit } 10 + 10 + 1 + 1 + 1$$

Mais 221 :

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array} \quad 100 \quad \begin{array}{r} 10 \\ 10 \end{array} \quad 1 \quad \text{soit } (1 + 1) 100 + 10 + 10 + 1$$

C'est l'exacte transposition des opérations successives de groupements en tas. Mais la présence de signes spéciaux pour 10 et pour 100 et la multiplication des tas de 100 montrent aussi, qu'une fois certains tas constitués, ils étaient considérés comme de nouvelles unités qu'on dénombrerait pour elles-mêmes.

Notons pour terminer que tout ceci suppose que la collection à dénombrer est finie. En effet un nombre transfini ne saurait s'atteindre par les démarches précédentes. On pourrait bien, en imaginant que le procédé se poursuit sans fin « parler » d'infini, poser même « aleph-zéro » comme la limite inaccessible, ainsi que le fait, par exemple, Weber dans son *Encyklopädie* :

« Um die Menge aller Zahlen aufzufassen, müsste ich mir einen Geist denken, dem meinigen völlig gleich, aber unveränderlich und unbegrenzter Dauer. » ⁴

Il n'est toutefois pas possible de passer au-delà. Et même on a vu

¹ Op. cit., p. 363.

² J. PIAGET, *La genèse du nombre chez l'enfant*.

³ *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*, Ch. II.

⁴ Op. cit., p. 14.

plus haut ¹ qu'un ensemble étant donné, la possibilité de l'épuiser pouvait servir à définir son caractère fini.

2. Théorie cardinale

Elle est basée sur la théorie des ensembles et on la trouve exposée chez de nombreux auteurs.

Elle prend comme point de départ le point d'arrivée de l'autre. Considérons en effet une collection d'objets. Faisons abstraction de leurs qualités distinctives ainsi que de l'ordre dans lequel l'esprit les appréhende. Une propriété subsiste cependant et c'est le nombre des objets. C'est ainsi que Cantor l'entendait déjà :

« Mächtigkeit oder Kardinalzahl von M [un ensemble donné] nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, dass von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird. » ²

Ce texte ne signifie pas que le temps ne joue aucun rôle. Au contraire les mots « Denkvermögen », « hervorgehen », « Beschaffenheit » laissent entendre qu'une activité préalable est nécessaire. On ne pourra même faire abstraction de l'ordre dans lequel les éléments sont donnés que si on a commencé par prendre conscience de cet ordre. Mais l'intérêt de ce point de vue réside en ceci que, volontairement, on ignore la façon dont les éléments sont donnés : dans le temps ou pas dans le temps, peu importe. Cette indifférence à l'égard de la genèse des éléments se traduit par le fait que le nombre n'apparaît pas comme une propriété des éléments, mais de leur ensemble en tant que tel. Couturat, dans les *Principes des mathématiques* a insisté sur ce point :

« Le nombre cardinal est la propriété d'une classe considérée comme un tout, comme un objet, et non pas des objets individuels qui la composent. » ³

Considérons donc des ensembles, comme par exemple $\{a, b, c\}$, $\{B, C, A\}$, $\{3, 2, 1\}$, etc. Ils jouissent tous d'une même propriété qui peut se traduire par la possibilité d'établir entre eux une correspondance biunivoque. Naturellement une telle correspondance ne s'établit que pas à pas. On met d'abord a en correspondance avec B , puis b avec C et ainsi de suite. Mais précisément, les exposés de la théorie cardinale partent d'ensembles entre lesquels existe déjà une correspondance. C'est ainsi que Russel dans les *Principia* parle de deux classes équivalentes α et β en écrivant :

$$*73.1 \mid - \alpha \text{ sm } \beta . \leftrightarrow : (ER) : R \varepsilon 1 \rightarrow 1 . \alpha = D'R . \beta = C'R$$

¹ Cf. Ch. IV, 2.

² Cité par FRAENKEL, *Einleitung in die Mengenlehre*, p. 14.

³ Chap. II, p. 46.

Cette proposition qui n'est d'ailleurs, pour des raisons techniques, pas une définition mais un théorème, n'indique nullement comment établir une correspondance biunivoque entre α et β . Elle signifie seulement que, toutes les classes possibles étant pensées, si l'une, α , est le domaine d'une relation biunivoque R , et si une autre, β , est le codomaine de la même relation, alors α est équivalente à β .

Il est maintenant facile de définir le nombre cardinal d'une classe, $Nc'\alpha$, sans aucune allusion à un devenir quelconque :

$$*100.1 \quad Nc'\alpha = \hat{\beta} (\beta \text{ sm } \alpha) \quad Df$$

Le nombre cardinal d'une classe α est la classe des β qui sont équivalentes à α .

Cette notation offre encore l'avantage de faire voir par quelles autres notions le temps est remplacé. En définitive, seules les notions de « classe », de « relation » et d'« abstracteur » entrent en jeu.

Dans le même ouvrage, Russel définit l'addition de deux nombres en la ramenant à la réunion de deux classes. Enfin il définit la relation d'égalité et celle d'inégalité. Commençons par celle d'inégalité.

« A cardinal μ is said to be greater than another cardinal ν when there is a class α which has μ terms and has a part which has ν terms, while there is no class β which has ν terms and has a part which has μ terms. »¹

En formule :

$$*117.3 \quad \vdash Nc'\alpha > Nc'\beta . \leftrightarrow : \exists ! Cl'\alpha \cap Nc'\beta . \& . \bar{\exists} ! Cl'\beta \cap Nc'\alpha$$

Ici « $Cl'\alpha$ » représente l'ensemble des parties de α et le signe « $\exists !$ » signifie que la classe qui suit n'est pas vide.

On peut dès lors définir la relation « $\geq$ » :

$$*117.22 \quad \vdash \exists ! Cl'\alpha \cap Cl'\beta . \leftrightarrow . Nc'\alpha \geq Nc'\beta$$

Le nombre cardinal de α est « plus grand ou égal » au nombre cardinal de β si, et seulement si, l'intersection des parties de α et de β n'est pas vide. Enfin on arrive à l'égalité :

$$*117.23 \quad \vdash Nc'\alpha \geq Nc'\beta . Nc'\beta \geq Nc'\alpha : \leftrightarrow . Nc'\alpha = Nc'\beta$$

Encore une fois le temps ne joue aucun rôle. Les relations « $>$ », « $\geq$ », « $=$ » se ramènent à des emboîtements de classes actuellement réalisés.

Il reste à tirer de là l'idée de suite naturelle des nombres, c'est-à-dire l'idée de rang. On pourrait dire simplement : soit l'ensemble des nombres cardinaux, NC :

$$NC = \hat{\mu} \{ (E\alpha) . \mu = Nc'\alpha \}$$

¹ *Op. cit.*, T. II, p. 171.

actuellement ordonné de telle façon que tout élément de l'ensemble soit plus grand que tous ceux qui sont écrits à gauche et plus petit que tous ceux qui sont écrits à droite. Cet ensemble constitue alors la « suite naturelle des nombres ». C'est en substance ce à quoi revient la théorie des « ancêtres » de Russel, et cela fait voir qu'on peut parfaitement se passer du temps.

Toutefois, si on analyse les actes psychologiques sous-jacents, on parvient à une conclusion un peu différente. Voici, par exemple, comment Tannery¹ effectue le passage du nombre à l'idée de rang :

« Ranger des objets dans un certain ordre, c'est faire correspondre un de ces objets au nombre un, l'appeler *premier* ; puis faire correspondre un autre au nombre deux, l'appeler *deuxième*..., etc. On n'opère pas autrement quand on *compte* les objets d'une collection, un à un ; on les fait correspondre successivement aux noms un, deux, trois, quatre... »

On a rejoint ainsi la théorie ordinale. Mais on notera que Tannery explique ce que c'est que « ranger des objets », tandis que Russel se borne à expliquer à quelles conditions satisfont des objets qui « sont rangés ». D'autre part le processus temporel de numérotage ne fonde pas ici le nombre. Ce n'est qu'une suite d'actes momentanés, sans importance fondamentale, puisqu'on ne commencera à raisonner mathématiquement qu'après qu'ils auront été accomplis.

3. Le raisonnement par récurrence

On pourrait encore définir le nombre par l'intermédiaire d'un jeu d'axiomes. C'est ainsi que, selon W. Beth², Dedekind se donnait :

- (a) un ensemble N ,
- (b) une application biunivoque f de N sur N ,
- (c) un élément e

tels que :

- (1) e appartient à N ,
- (2) si a appartient à N , alors $f(a)$ appartient à N ,
- (3) N est l'intersection de tous les ensembles K qui contiennent l'élément e et qui contiennent le sous-ensemble $f(K)$,
- (4) si a appartient à N , alors $f(a)$ est différent de e ,
- (5) si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.

¹ *Leçons d'arithmétique*, p. 2.

² *Op. cit.*, p. 28.

Ces cinq axiomes caractérisent ainsi des ensembles N , des relations f et des éléments e , ils définissent un nombre illimité de systèmes (N, f, e) . Il est donc possible de donner des *modèles* de ces systèmes, tels par exemple ceux de Peano¹, de Landau², de Dubreil³. Ces modèles ne diffèrent évidemment du schéma ci-dessus que par la terminologie. C'est ainsi que « e » est appelé « un » ou « zéro », que « f » est nommé « succéder » ou « suivre » et que « N » s'appelle « ensemble des nombres naturels ».

Il y a toutefois dans ce changement de vocabulaire une intention qu'il convient de préciser. En effet, le caractère formel des nouveaux axiomes est le même que celui des propositions (1)-(5) ci-dessus. Remplacer le graphisme « $f(a)$ » par « le successeur de a » ne serait qu'une complication d'écriture, si la nouvelle expression était considérée comme identique à l'ancienne. C'est donc la signification même de l'axiomatique qui est en jeu. Attacher une importance aux mots utilisés implique qu'on voit dans l'axiome davantage qu'un jeu de symboles. L'axiome, à ce point de vue, est la traduction, particulièrement précise, d'un donné préaxiomatique, traduction qui d'ailleurs modifie son objet⁴. Dès lors, selon que l'on décrira une succession de nombres ou une classe de nombres, la terminologie variera. Ainsi, par exemple, R. Poirier⁵ parle du « successeur d'un nombre », Landau du « suivant d'un nombre », tandis que Dubreil parle de « nombres associés ».

Remarquons encore que tout ceci reste très relatif. Rien n'empêche de réduire N, f, e à d'autres notions. Padoa s'est passé de e ⁶, Russel a tout ramené à l'idée de classe et de relation⁷. Ceci montre une fois de plus qu'au moment où se constitue la construction axiomatique, l'intuition, et le temps en particulier, n'est plus qu'une interprétation ou un échafaudage périmé.

Toutefois un des axiomes, l'axiome (3), dit aussi souvent axiome de récurrence, a donné lieu d'abord à une interprétation nettement temporelle. Il faut dire aussi que la récurrence est apparue comme un mode de raisonnement qui dépassait le cadre des nombres entiers. H. Poincaré en a donné une analyse qui montre bien une des fonctions du temps et parallèlement une façon de l'évincer⁸.

Le raisonnement par récurrence permet, soit de définir une propriété, soit de démontrer une propriété. Prenons un exemple de démonstration. Soit à démontrer l'associativité de l'addition des nombres naturels :

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

On montre d'abord que si le théorème est vrai pour $c = \gamma$, il est encore

¹ *Formulaire des mathématiques*, cité par COUTURAT, *Les Principes*, Ch. II.

² *Grundlagen der Analysis*, Ch. I.

³ *Algèbre*, T. I, Note I.

⁴ Cf. F. GONSETH, *La géométrie et le problème de l'espace*, III.

⁵ *Le nombre*, p. 91.

⁶ Cf. COUTURAT, *op. cit.*

⁷ *Introd. à la philosophie math.*, Ch. II et III et *Principia*.

⁸ *La Science et l'Hypothèse*, Ch. I ; *Revue de métaphysique et morale*, juil. 1894.

vrai pour $c = \gamma + 1$. Puis on vérifie qu'il est vrai pour $c = 1$. On dit alors :

« Le théorème est vrai du nombre 1.
 Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2.
 Donc il est vrai de 2.
 Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3.
 Donc il est vrai de 3 ; et ainsi de suite. »¹

On est en présence d'une succession indéfinie de syllogismes. Chacun d'eux fournit un théorème particulier et leur ensemble, au stade où on s'arrête, fournit encore un théorème particulier, applicable seulement aux n premiers nombres. De sorte que si ces syllogismes sont en effet pensés dans le temps, ce temps est une gêne qui empêche d'obtenir la proposition générale. C'est alors qu'intervient l'idée d'*infini actuel*. La structure des nombres étant uniforme et le raisonnement ayant pu se faire pour 1 et pour le passage de γ à $\gamma + 1$, rien n'empêcherait de le poursuivre. En conséquence il est vrai pour *tous* les nombres. Dès lors toute la construction temporelle ci-dessus devient inutile. Elle n'apparaît plus que comme une vérification expérimentale.

Resterait évidemment à justifier l'induction elle-même, le passage du fini à l'infini. Cela pourrait se faire en montrant qu'une telle affirmation n'implique pas contradiction, en la ramenant donc au principe :

$$\vdash [\Phi y] \rightarrow (x) \Phi x^2$$

et en s'assurant qu'il est possible de construire une logique qui contient cette proposition et qui est non contradictoire. Mais on peut aussi chercher une explication psychologique, comme le fait Poincaré qui écrit :

« Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe. »³

Ainsi, sous cet angle, le temps resterait le fondement dernier de l'*infini actuel*⁴.

Il faut reconnaître toutefois que ce point de vue n'est plus guère adopté. Le raisonnement par récurrence suppose seulement une structure définie de l'ensemble sur lequel on veut l'appliquer. Dès lors se donner l'axiome (3) c'est poser, en dehors de toute justification, que le raisonnement par récurrence est possible. On pourrait alors renverser plus complètement encore les notions et dire, avec Russel⁵, que tout ensemble d'éléments sur

¹ *Op. cit.*, p. 20.

² Conformément à la convention des *Principia*, '[Φy]' signifie : de quelque façon qu'on choisisse y , on aura Φy .

³ *Ibid.*, pp. 23-24.

⁴ Cf. déjà Ch. IV, 3.

⁵ *Introduction à la philosophie mathématique*, Ch. III.

lequel le raisonnement par récurrence est valable est un ensemble de *nombres inductifs*. On montrerait ensuite que l'ensemble des nombres naturels est un ensemble inductif.

Une fois l'obligation temporelle éliminée, il est possible d'effectuer de nouvelles généralisations. C'est ainsi que l'on peut envisager une induction transfinie, valable sur tout ensemble bien ordonné E.

« Pour établir que tous les éléments de E ont une certaine propriété A, dit Dubreil, il suffit de montrer qu'un élément possède cette propriété dès qu'il en est de même pour tous ceux qui le précèdent (en particulier on montrera que le premier élément de E a cette propriété). Si en effet l'ensemble des éléments de E qui n'ont pas la propriété en question, n'était pas vide, il admettrait un premier élément, d'où contradiction. »¹

On voit donc qu'en définitive, pour éliminer le temps dans ces sortes de questions, on pose par postulat que l'infini pourrait s'épuiser comme le fini, et même que le transfini pourrait s'épuiser aussi. Si l'existence d'un axiome spécial n'est pas nécessaire dans certains cas, elle l'est en général, puisque la récurrence transfinie exige la bonne ordination de l'ensemble.

Conclusions

Ce chapitre confirme les conclusions précédentes quant au rôle du temps et cela jusque dans les fondements de l'analyse. Il est vrai que Husserl, par exemple, a critiqué l'attitude qui voulait ramener le nombre au temps ou à l'espace, disant en substance qu'il n'y a là rien de particulier au nombre et que tout objet de pensée se construit d'abord par étapes successives sur la donnée d'objets concrets². Cela est vrai, mais ne prouve pas que le nombre ne fasse pas appel au temps de façon plus particulière qu'une autre notion. Ce qu'il faudrait montrer, c'est que la construction d'éléments successifs n'apporte rien d'essentiel. Pour cela il faut distinguer deux emplois du temps : le temps qui donne l'existence à un être mathématique et le temps qui fournit un modèle d'ordre.

(1) Un nombre quelconque, n , est d'abord construit de la même façon qu'un polygone est construit par le dessin successif de ses n côtés. Par là une certaine existence est donnée à l'objet de la méditation et on est en droit de dire : « Soit cet objet ».

Toutefois l'ensemble des nombres est infini, propriété qui se traduit par l'impossibilité d'en achever la construction, donc de lui donner existence *de cette manière*. C'est alors qu'on *postule* que l'avenir aura une structure identique au passé et qu'en conséquence on est en droit de faire

¹ *Op. cit.*, Note II.

² *Philosophie der Arithmetik*, Ch. II.

le « saut » jusqu'à l'infini. C'est là le sens de l'expression courante : soit l'ensemble des nombres naturels.

Cependant, expliqué ainsi, ce passage à l'infini repose sur un postulat d'origine extra-mathématique. Aussi adopte-t-on le plus souvent une autre attitude. Peu importe comment construire les nombres. On part de leur ensemble considéré en soi. On n'étudie pas les propriétés des nombres, mais celles des ensembles. Le mot « existence » change de sens, il ne signifie plus qu'absence de contradiction. Alors si quelqu'un veut construire un nombre, mettons 3, libre à lui de le faire par l'addition répétée de 1, $1 + 1$, $1 + 1 + 1$. Il agit dans le temps, certes, mais *cela ne compte pas*, il applique une théorie indépendante de ses modèles.

(2) Mais le temps apporte encore autre chose avec lui, à savoir l'idée d'un ordre. Nous avons déjà vu au chapitre VI comment la notion d'ordre une fois connue peut s'exprimer à l'aide de notions non temporelles. Il est cependant hors de doute qu'elle a joué un rôle essentiel, au point que Hamilton, par exemple, a pu écrire :

« The contrast between the Future and the Past appears to be even earlier and more fundamental, in human thought, than that between the Great and the Little. » ¹

Notons pour finir que l'attitude qui consiste à partir de quelque chose qui, historiquement, est le résultat de constructions et à élargir la portée de ce que fournit l'expérience doit nécessairement rejeter les intuitions préalables. L'extrapolation en effet ne cesserait pas, par définition, de s'inscrire à faux contre l'observation. Ainsi, par exemple, tout ce qui dépend de l'axiome du choix serait sans valeur, s'il était exigé de savoir *comment* effectuer les choix successifs. Une telle théorie doit se rendre indépendante du temps intuitif comme une géométrie doit se rendre indépendante de la feuille de papier, pour pouvoir parler valablement d'objets qui dépassent l'imagination.

Ces objets abstraits peuvent-ils encore servir de modèles aux objets concrets que nous situons dans le temps ? Il le semble bien, puisque nous avons relevé que l'existence une fois garantie par un postulat, rien n'empêchait une construction effective aussi précise qu'il le fallait. C'est là toutefois une question importante et nous allons chercher à la préciser un peu. Le calcul des probabilités, qui d'une part constitue une théorie mathématique et qui d'autre part est une science d'application, nous fournira le matériel nécessaire à cette dernière étude.

¹ *Op. cit.*, p. 4.

CHAPITRE IX

LE TEMPS ET LE CALCUL DES PROBABILITÉS

Dans les chapitres précédents l'analyse mathématique a été considérée en elle-même, indépendamment du fait qu'elle pouvait représenter un instrument de pensée capable de rendre compte de la réalité concrète. D'autre part, la nature matérielle de ses origines n'a joué que peu de rôle, soit qu'elle remontât trop loin, soit qu'on fût parvenu assez facilement à en faire abstraction.

Le calcul des probabilités, par contre, offre un exemple de mathématiques appliquées en même temps que d'une théorie encore partiellement engagée dans ses origines concrètes.

1. *Le dualisme du calcul des probabilités*

Jacques Bernoulli définit ainsi l'objet du calcul des probabilités :

« Ars conjectandi sive Stochastice nobis definitur ars metiendi quam fieri potest exactissime probabilitatis rerum, eo fine, ut in judiciis et actionibus nostris semper eligere vel sequi possimus id, quod melius, satius, tutius aut consultius fuerit deprehensum. »¹

Il s'agit donc, aux origines, d'une science utilitaire, d'une science appliquée. Encore son objet est-il assez général pour qu'on puisse hésiter à en faire une science physique. S'il s'agissait d'estimer la probabilité du retour d'une comète ou celle de la présence d'une certaine tache de couleur sur l'aile d'une mouche, on parlerait sans hésiter d'astronomie ou de génétique. Toutefois le calcul des probabilités veut s'occuper non de telle ou telle classe de phénomènes, mais des « choses quelconques », ce qui tend à lui donner l'aspect d'une science mathématico-logique².

Il reste cependant que les choses dont le calcul des probabilités s'occupe sont d'une catégorie bien déterminée. Un joueur cherche la probabilité d'amener un double-six dans la partie qu'il va faire ; un actuaire

¹ *Oeuvres*, p. 213. Cité par C. GINI, *Dialectica*, 9/10, p. 42.

² Cf. M. Gonseth et la « Physique de l'objet quelconque ».

calcule la probabilité pour qu'un assuré décède dans l'année qui *vient* ; un historien détermine la probabilité (d'ailleurs non mathématique) pour que César ait été assassiné aux Ides de mars. Le calcul des probabilités se propose donc de déterminer un certain caractère de ce qu'on peut appeler des événements, c'est-à-dire des faits

« dont l'élément temporel a plus d'importance que l'élément spatial »¹,

des faits qui apparaissent surtout « comme un changement ».

Ainsi d'une part les définitions classiques de la probabilité parlent d'« événement » :

« La probabilité d'un événement est estimée par l'énumération des cas favorables, rapprochée de celle des cas possibles »² ;

d'autre part, nombre de définitions s'expriment explicitement en langage de temps. Telle celle des événements composés, tirée encore de l'ouvrage de J. Bertrand :

« Un événement composé est défini par le concours de plusieurs événements simples que le hasard doit amener successivement ou simultanément. »³

Citons enfin ce commentaire de Laplace à un exemple de probabilité composée :

« On voit, dit-il, par cet exemple, l'influence des événements passés sur la probabilité des événements futurs. »⁴

Le terme d'« événement », s'il est manifestement temporel, n'est d'ailleurs pas le seul de son espèce. On parle aussi constamment de *hasard*. Il est sans doute extrêmement difficile de donner une définition du hasard qui recouvre les multiples usages qu'on en fait. Mais il semble bien que le caractère essentiel, commun à toutes les acceptions du mot, soit une absence de loi, une absence de règle⁵.

Imaginons par exemple un circuit électrique dont chaque élément est bien déterminé. Que va-t-il se passer au moment où nous mettrons le courant, en particulier les fusibles vont-ils fondre ? Les lois d'Ohm permettent de répondre à la question. Par elles, on calcule l'intensité du courant qui passera et, si on la trouve inférieure à celle que supportent les fusibles, on peut répondre que les fusibles ne fondront pas, sans même faire l'expérience. La loi élimine donc le temps, en ce sens qu'une formule comme $i = \frac{U}{R}$ ne prévoit pas l'avenir, mais qu'elle est une relation atemporelle entre diverses grandeurs. La valeur numérique de i est le quotient de la valeur numérique de U par celle de R , aujourd'hui et toujours.

¹ *Vocab. philos.*, Article *Fait*, note de V. Egger.

² et ³ J. BERTRAND, *Calcul des probabilités*, p. 1 et p. 24.

⁴ LAPLACE, *Essai philosophique sur les probabilités*, p. 16.

⁵ Cf. *Vocab. phil.*, Art. *Hasard*.

Mais supposons que l'installation une fois faite, les valeurs de ses éléments soigneusement vérifiées, nous mettions le courant *et que les fusibles sautent*. Alors nous dirons qu'il s'agit d'un hasard. Quelque chose de nouveau a surgi que nous ne pouvions pas prévoir, quelque chose que Meyerson englobait dans ce qu'il nommait « l'irrationalité » du temps.¹ Sans doute pouvons-nous, dans certains cas, modifier la loi pour éliminer le hasard. Mais la question n'est pas là, le calcul des probabilités ne s'occupe que des événements dus au hasard. »

Cette discussion se résume fort bien dans le texte suivant où v. Mises décrit le matériel du calcul des probabilités :

« Gegenstand der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind Massenerscheinungen oder Wiederholungsvorgänge ; sie bestehen aus einer sehr grossen Zahl aufeinanderfolgender Elemente (Beobachtungen), deren jedes als Merkmal (Beobachtungsergebnis) eine Zahl (oder eine Gruppe von Zahlen) in ‚regelloser Anordnung‘ aufweist. »²

Les idées d'apparition, de répétition, de succession, d'absence de règle, sont les signes du rôle que joue le temps.

Mais tout ceci n'est qu'un aspect. Le calcul des probabilités est aussi un *calcul*, une science mathématique. On attend de lui qu'il fournisse des lois sur les événements à venir et sa valeur pratique même ne lui vient que de ramener le futur au passé. Le calcul des probabilités doit donc faire abstraction du temps pour remplir son rôle de science.

Sans doute toute science appliquée offre ce double aspect. Il prend toutefois ici l'allure d'une contradiction. L'ingénieur, qui applique les théorèmes de la géométrie, les applique bien à des objets concrets, placés dans l'espace et dans le temps. Mais si un cube de béton n'a que des propriétés assez approximativement semblables à celles du cube abstrait, fruit des axiomes de la géométrie, il n'en reste pas moins que cette approximation demeure à peu près la même pour très longtemps. A notre échelle un socle de ciment est immuable. Il n'en est plus de même pour le calcul des probabilités. C'est le changement même qui est en jeu de telle sorte que d'une part l'objet du calcul des probabilités est essentiellement changement et que d'autre part ses propositions ne sont possibles qu'en faisant abstraction de ce changement. « Comment donc, disait J. Bertrand, oser parler des lois du hasard ? »³

La réponse la meilleure est par le fait : le calcul des probabilités existe et fournit, dans certaines conditions, des résultats que l'expérience vérifie. Mais ce qui précède explique qu'on se trouve en face de deux attitudes opposées quant à la façon d'envisager le calcul des probabilités et qu'on pourrait appeler l'*attitude empirique* et l'*attitude axiomatique*.

La première établit toute la théorie sur la base d'observations réelles et tend à construire une science naturelle. L'ouvrage de von Mises déjà cité, celui de A. Fisher, *The mathematical theory of probability* en sont

¹ *Identité et réalité*.

² *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1, 1, pp. 9-10.

³ *Calcul des probabilités*, Préface, p. VI.

des exemples. La seconde, au contraire, établit la théorie sur un jeu d'axiomes en principe soumis aux seules conditions d'être non contradictoires et, si possible, indépendants les uns des autres. Elle tend à construire une science logico-mathématique. L'ouvrage de J. Keynes, *Ueber Wahrscheinlichkeit*, en est un exemple.

Il faut remarquer toutefois qu'il ne s'agit là que d'attitudes et que les théorèmes établis ont le même contenu dans les deux cas, ce qui s'explique aisément. On n'assiste presque jamais en effet à une construction axiomatique faite pour le plaisir du jeu seulement, bien que la chose soit concevable. Le plus souvent les axiomes veulent traduire une construction préalable et l'identité des théorèmes démontrés est alors un signe de leur valeur. On peut dire plus encore. L'histoire du calcul des probabilités montre que certaines des théories mathématiques particulières qui y servent n'ont été inventées et développées que pour rendre compte de faits déjà connus, que pour donner prise au calcul sur des principes d'origine extérieure à lui. C'est ainsi que Laplace écrit :

« L'application des principes que nous venons d'exposer [ceux du calcul des probabilités : notion de probabilité-quotient, d'événements composés, etc.] aux diverses questions de probabilité, exige des méthodes dont la recherche *a donné naissance* à plusieurs branches de l'analyse, et spécialement à la théorie des combinaisons, et au calcul des différences finies. »¹

Il est ainsi certain que l'attitude axiomatique est précédée, au moins historiquement, par une première attitude empirique². Mais inversement, une attitude empirique pure n'est pas concevable. Toutes deux offrent donc un passage du concret à l'abstrait ou de l'abstrait au concret qui se traduit ici soit par l'élimination du temps, soit par son introduction.

Il sera cependant commode de distinguer parfois dans ce qui suit entre deux sens du mot « probabilité », selon qu'il s'agira d'un concept défini *a priori* par un système d'axiomes ou d'un concept réunissant certaines propriétés d'éléments concrets. Adoptant la terminologie utilisée par R. Carnap dans son ouvrage *The nature and application of inductive logic*, nous désignerons le premier par « probabilité₁ » et le second par « probabilité₂ ». Sans être peut-être exactement ce que Carnap entend, ce n'est pas non plus le trahir puisqu'il dit de la probabilité₁ qu'elle est de nature « purement logique »³ et de la probabilité₂ qu'elle « peut être regardée comme représentant la fréquence relative »⁴.

2. Le rôle et l'élimination du temps

Il est d'abord évident que, si les choses se passaient comme si elles étaient arbitrairement créées à chaque instant par un « malin génie », si,

¹ *Essai*, p. 50. C'est moi qui souligne.

² Voir par exemple l'ouvrage de A. Fisher qui marque bien ces deux moments.

³ et ⁴ *Op. cit.*, p. 174 et p. 173.

lancée, la pièce de monnaie parfois tombait sur pile ou sur face et parfois ne retombait pas ou se muait en dé, nous ne pourrions guère songer à établir un calcul des probabilités efficace. Il y a donc, sous-jacente à toute théorie des probabilités, en tous cas une hypothèse qui assure la possibilité du passage concret-abstrait. Ce principe est celui d'une sorte de causalité ou tout au moins d'uniformité. Pour A. Fisher par exemple, c'est un principe de causalité :

« Everything that happens, and everything that exists, necessarily happens or exists as the consequence of a previous state of thing. »¹

Pour R. Carnap c'est un principe d'uniformité qu'on peut énoncer, sous une forme déjà passablement élaborée, comme suit :

« On the basis of the available evidence it is very *probable* that the degree of uniformity of the world is high. »²

Ceci fait qu'il y a un sens à faire abstraction, dans les données de l'expérience, de toutes sortes de qualités qui leur sont propres pour garder seulement celles qui manifestent l'uniformité du monde dont parle Carnap.

Partons donc, avec un grand nombre de probabilistes contemporains, de la notion de fréquence. Soit alors E un ensemble d'événements. Envisageons seulement le cas le plus simple où nous partageons les éléments de E en deux classes : les éléments de E qui vérifient la fonction propositionnelle $\Phi \hat{x}$ et qui constituent un sous-ensemble A de E et les autres. Ceci fait, ne retenons des ensembles A et E que leur propriété « nombre cardinal ». Alors, par définition, la fréquence relative de la propriété Φ dans l'ensemble E est le quotient :

$$\frac{Nc' A}{Nc' E}, \text{ c'est la probabilité } {}_2.$$

La probabilité ${}_2$ est donc bien le résultat d'une observation concrète et elle est temporelle en ce sens qu'elle dépend du nombre des observations et que l'arrivée des événements futurs en modifie la valeur.

Mais supposons maintenant que les éléments de E soient de telle sorte qu'ils ne se produisent plus à l'avenir. Alors le quotient ci-dessus a une valeur définitive et le temps n'a plus de prise sur lui. Cette hypothèse revient à supposer qu'on est capable, par un moyen ou par un autre, de dénombrer tous les éléments de l'ensemble E. Chaque fois que la chose est possible, la valeur de la probabilité ${}_2$ est immuable. On est donc déjà sur la voie du postulat qui fera passer de la probabilité ${}_2$ à la probabilité ${}_1$ et qui consiste à *poser* que la probabilité d'un événement est le rapport

¹ *Op. cit.*, p. 2.

² *Op. cit.*, p. 180.

$$\frac{Nc' A}{Nc' E}, \text{ s'il a un sens,}$$

dans le cas où E est infini. Alors tout est accompli et une fois encore on s'est débarrassé du temps par le moyen de la théorie des ensembles et particulièrement de l'infini actuel.

C'est de cette façon que procède v. Mises qui, après être parti comme on l'a vu « d'un très grand nombre d'éléments qui se suivent les uns les autres » poursuit :

« Es muss möglich sein, sich die Folge der Einzelercheinungen oder Beobachtungen (Elemente) unbeschränkt fortsetzbar zu denken. »¹

Il y a toutefois deux restrictions à ce mode de faire. D'abord le rapport $Nc' A : Nc' E$ n'a, *a priori*, aucun sens et même l'expérience ne saurait lui en attribuer un. L'expérience est ici aussi inopérante que dans le cas de deux droites parallèles. Elle ne peut servir à déterminer leur équidistance. D'autre part, n'importe quel ensemble infini E ne peut pas servir. Il faut encore que E soit un ensemble d'événements « dus au hasard ». D'où la nécessité de deux axiomes que v. Mises énonce ainsi :

« *Erste Forderung* : Ist n_0 bzw. n_1 die Anzahl derjenigen unter der ersten Beobachtung, deren Ergebnis „0“ bzw. „1“ ist, so existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_0}{n} = w_0 ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1}{n} = w_1$$

» *Zweite Forderung* : Wird aus der Gesamtfolge durch „Stellenauswahl“ eine unendliche Teilfolge gebildet, so existieren auch innerhalb dieser Teilfolge die gleichen Grenzwerte

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{n'_0}{n'} = w_0 ;$$

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{n'_1}{n'} = w_1 \quad . »^2$$

Le caractère de la notion de limite est tel que la rupture entre le concret et l'abstrait est consommée. Les exigences ci-dessus, comme les définitions des quatre opérations fondamentales : die Auswahl, die Mischung, die Teilung et die Verbindung suffisent alors à établir par voie mathématico-logique tout le calcul des probabilités.

Il reste maintenant à examiner l'attitude axiomatique. Celle-ci n'exige aucunement que ses axiomes soient suggérés par l'expérience et même elle ne réclame pas que ceux-ci s'expriment à propos d'événements et de hasard. C'est ainsi que Keynes cherchera, selon son expression, « eine logische Beziehung zwischen zwei Gruppen von Sätzen »³. Le

¹ *Op. cit.*, 1, 2, p. 10.

² *Ibid.*, 1, 2, p. 14.

³ *Op. cit.*, p. 6.

mot « probabilité » figure bien, mais c'est à titre purement accidentel. Tout autre terme y pourrait convenir, comme on peut s'en rendre compte en lisant l'axiome I :

Si a et h sont des propositions, conjonctions ou disjonctions de propositions, et si h n'est pas une conjonction contenant une contradiction, alors il y a une et une seule relation de probabilité P entre a comme conclusion et h comme prémisses.

Cela revient à parler d'une relation $P(h, a)$ que Keynes note plutôt $a/h = P$ (Déf. 1). Toutes les propriétés de la relation P s'exprimeront d'analogue façon sans allusion à un contenu possible.

Mais les choses changent au moment où, dans la cinquième partie de son ouvrage, Keynes examine les applications de sa théorie à la statistique.

« Es wird versucht, dit-il, die Beschreibung der Eigenschaften beobachteter Vorgänge auf die entsprechenden Eigenschaften anderer, noch nicht beobachteter Vorgänge auszudehnen. »¹

On a déjà vu qu'un tel problème, qui fait intervenir des probabilités² n'est possible que sur la base d'un principe d'uniformité portant sur la réalité. Keynes, pour son compte, le formule ainsi :

« Bei gewissen Erscheinungen zwar die Voraussage des einzelnen Falles unmöglich ist, aber dennoch eine Regelmässigkeit besteht, wenn die Ereignisse aufeinander folgender Gruppen betrachtet werden. »²

Il faut toutefois remarquer que si, dans les théories empiristes, un tel principe semble nécessaire à fonder la théorie elle-même, il ne sert plus ici qu'à fonder la théorie de l'application. Mais son rôle technique est le même : garantir qu'on trouvera dans l'expérience des éléments atemporels. Montrons-le sur un exemple et pour cela considérons le théorème de Bernoulli.

Il enseigne que si p est la probabilité d'un événement, q la probabilité de l'événement contraire, μ le nombre des épreuves et m la fréquence absolue de l'événement, il y a une probabilité P , approximativement donnée par la formule

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{1}{\sqrt{2\mu\pi pq}} e^{-\gamma^2}$$

pour que $\frac{m}{\mu}$ soit compris dans l'intervalle

$$\left(p - \gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}, p + \gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}} \right) \text{ où } \gamma = \frac{l}{\sqrt{2pq\mu}}$$

¹ *Op. cit.*, Chap. XXVI.

² *Op. cit.*, p. 278.

Il s'agit là d'une proposition analytique qui repose essentiellement sur la théorie des combinaisons. L'approximation qui y figure n'a rien à voir avec une question concrète. Elle ne découle que des simplifications obtenues en remplaçant les factorielles par les premiers termes de la formule de Stirling. Aussi le théorème de Bernoulli ne peut-il aucunement enseigner la façon dont se dérouleront les phénomènes physiques¹. La notion de probabilité utilisée est une probabilité₁. La question est alors de savoir ce qui va en être pour la valeur observée de la probabilité₂. Sera-t-elle toujours dans l'intervalle prévu? La réponse n'est pas inconditionnée.

D'une part en effet, il faut que la probabilité₂ soit assimilable à la probabilité₁, et d'autre part le théorème de Bernoulli ne peut encore garantir que *toutes* les fréquences relatives seront dans l'intervalle. Envisageons séparément les deux points.

a) Le premier n'est soluble que sur le plan de l'expérience. Or la condition requise est précisément d'ordre temporel. Ce qu'il faut c'est que les diverses valeurs des probabilités₂ se groupent autour d'une valeur moyenne, c'est que la probabilité₂ tende vers la probabilité₁. Autrement dit c'est qu'on puisse valablement éliminer le temps. Ainsi que l'exprime Keynes :

« Wir müssen... wissen, dass die untersuchten Fälle in den belangvollen Eigenschaften sowohl einander als auch den noch nicht untersuchten Fällen ähnlich sind. »²

C'est donc bien au moment de leur mise en service que le principe d'uniformité se retrouve dans les théories axiomatiques.

b) Admettons donc que le théorème de Bernoulli soit applicable. Il affirme alors qu'on peut toujours prendre μ suffisamment grand pour que, quel que soit ε , on ait une probabilité $P > 1 - \varepsilon$ et telle que $|\frac{m}{\mu} - p| < \eta$ quel que soit η . Or la notion de limite ici introduite, qu'on pourrait appeler limite-probable, ne doit pas s'entendre au sens de l'analyse. En effet, le théorème ne dit pas que, dès que $\mu \geq M$, tous les écarts $|\frac{m}{\mu} - p|$ sont plus petits que η , mais seulement que le nombre de ceux qui dépassent η est de plus en plus petit. Il s'agit donc d'une sorte de garantie au deuxième degré seulement.

Ceci complète l'étude de la notion de limite exposée aux chapitres III et V.

3. Remarques sur l'induction

Le calcul des probabilités est étroitement lié à l'induction et même l'analyse des procédés généraux de l'induction conduit au même genre

¹ Cf. L.-G. DU PASQUIER, *Le calcul des probabilités*, pp. 75 et 114.

² *Op. cit.*, p. 310.

de problèmes que celle des probabilités. D'ailleurs, dans ses applications, le calcul des probabilités apparaît comme une méthode qui permet, dans certains cas, l'énoncé de jugements inductifs.

Reste à préciser ce qu'il faut entendre par « jugements inductifs ». Nous emprunterons notre définition à G. v. Wright qui distingue dans son *Treatise on induction and probability* deux types de tels jugements :

(a) « From the information that something has been the case under certain conditions *and* that the conditions are repeated we anticipate that the same thing will be the case again. » (Induction of the first order.)

(b) « From the information that something has been the case under certain conditions we anticipate that, *if* the same conditions are repeated, *then* the same thing will be the case again. » (Induction of the second order.)¹

On voit que dans les deux cas distingués par v. Wright l'induction est une question d'*anticipation*, ce qui implique qu'elle relève du temps, qu'elle s'attache à résoudre des problèmes de nature concrète et qu'enfin elle s'oppose à la déduction. Ces trois conséquences ne sont d'ailleurs pas indépendantes.

Considérons en effet les méthodes déductives. Elles se caractérisent par un groupe de propositions ou axiomes et par un groupe de règles formelles qui permettent la combinaison des axiomes. Ainsi, selon Carnap par exemple, la logique de la déduction (y compris les mathématiques) peut se définir comme « the theory of L-implication »². Ce qui fait que les axiomes et les règles de substitution contiennent implicitement toutes leurs conséquences possibles. Pour autant donc qu'on soit assuré d'avoir un système complet, une proposition quelconque d'une science déductive peut être considérée comme comprise dans ce système. Qu'il s'agisse ici seulement d'un idéal, irréalisé en fait à cause du problème de la décision en général non résolu³, n'enlève rien à l'absence théorique du temps.

Il en est tout autrement pour les méthodes inductives qui restent essentiellement non démonstratives :

« One of the essential characteristics of inductive inference, dit v. Wright, is its inconclusive or non-demonstrative nature. This means that the conclusion of the argument never follows from the ... premisses. »⁴

C'est donc par un abus de langage qu'on parle de « démonstration par induction complète » et au point de vue du temps la chose est d'importance. En effet, par cela même que l'induction s'applique à des objets concrets (ou inversement parce que, face à des objets concrets, nous utilisons l'induction), ses prémisses restent toujours incomplètes. Tout se passe comme si, dans les sciences déductives, le savant était son propre

¹ *Op. cit.*, pp. 13 et 14.

² *Op. cit.*, p. 194.

³ Cf. HILBERT UND ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik*.

⁴ *Op. cit.*, p. 63.

démiurge, tandis que dans les sciences inductives il se trouvait en face d'un univers créé par un autre dieu.

Il ne s'agit ici que d'un point de vue très sommaire. En un sens les mathématiques s'appuient sur le réel et inversement les sciences naturelles relèvent de théories. La nature s'offre à nous de telle sorte que nous ignorons l'avenir et c'est cette ignorance même qui ouvre la brèche par où s'insinue le temps. De sorte que, s'il est possible de dire d'un théorème exact qu'il le sera toujours, on ne peut dire d'une loi vraie qu'elle le restera toujours.

Il faut toutefois prendre garde de ne pas confondre deux sens du mot « induction ». D'une part les méthodes inductives conduisent à formuler certaines conclusions provisoires, mais d'autre part ces méthodes, en tant que telles, ont un caractère axiomatique. Elles sont susceptibles d'être formulées en termes purement logiques (ainsi l'ouvrage de v. Wright) et elles sont aussi indépendantes des faits et de leurs contenus que les méthodes déductives. Carnap insiste à juste titre sur ce point :

« It is irrelevant for the *validity* as distinguished from the practical value or applicability, of a statement of inductive logic, just as for one of deductive logic, whether the evidence is true or not and, if it is true, whether its truth is known or not. » ¹

En d'autres termes encore, l'induction, en tant que théorie, c'est-à-dire en tant qu'elle s'oppose à l'idée de prédiction, est atemporelle. Mais son rôle est de permettre des anticipations qui, elles, sont temporelles.

On retrouve ainsi le dualisme déjà noté au paragraphe précédent, dualisme qui se manifeste en pratique par un mouvement de va et vient ou, pour faire usage d'une image meilleure, par une marche en spirale de la pensée. Chaque conclusion inductive est provisoire, mais elle se complète et se fortifie sans cesse par l'apport des cas nouveaux.

Conclusions

L'élément le plus frappant des analyses précédentes est l'aspect de dualité du calcul des probabilités. D'une part en effet, il s'agit d'une branche des mathématiques abstraites. Des théorèmes y sont démontrés qui découlent d'axiomes en principe conventionnels et où le temps ne tient aucune place. La construction entière apparaît gouvernée par les règles d'une logique déductive.

Mais d'un autre côté, le même calcul des probabilités est une science d'application, une technique qui donne prise sur ce qu'on peut appeler les phénomènes du monde extérieur. Le temps joue alors un rôle fondamental puisque les propositions énoncées — on pourrait même dire les

¹ *Op. cit.*, p. 202.

lois — portent sur l'existence explicitement passée ou future des événements.

Ce double aspect n'est d'ailleurs pas nouveau. Dans chacun des chapitres précédents nous avons pu dégager certains éléments temporels et concrets. Mais leur importance restait secondaire. La variable-mobile a fait rapidement place à la variable-quelconque, la suite d'approximations a été remplacée par la limite fixe, l'infini potentiel en devenir s'est vu abandonné au profit de l'infini actuel. D'une façon générale, l'achevé a pris rapidement la place de l'inachevé. Dans le calcul des probabilités au contraire les deux points de vue continuent de se compléter l'un l'autre. En particulier le temps tient une place appréciable.

On pourrait évidemment demander s'il s'agit bien encore du même « temps » que plus haut. Il nous paraît possible de répondre par l'affirmative. D'abord parce que la notion de temps dont nous sommes parti au chapitre I^{er} a été choisie aussi large que possible ; ensuite parce que la technique pour garantir la présence de quelque chose que nous avons nommé « temps » n'a pas changé ; enfin parce que les moyens utilisés par le calcul des probabilités pour éliminer le « temps » sont les mêmes que ceux de l'analyse. On a vu, en effet, comment la limite se substituait aux suites de fréquences, comment des ensembles actuellement infinis remplaçaient les statistiques expérimentales et comment des relations générales et purement logiques prenaient la place des probabilités particulières.

Cela permet de considérer ce chapitre comme le prolongement des chapitres précédents. D'une part les conclusions déjà établies s'y trouvent une fois encore confirmées et d'autre part l'origine et le rôle du temps en mathématiques y paraissent plus clairement. En effet, les notions étudiées jusqu'ici : variable, fonction, etc., ont pris une telle généralité, elles ont subi une si profonde élaboration, qu'on pouvait être tenté d'en oublier les origines matérielles et même la perspective utilitaire. Cet oubli n'est guère possible en calcul des probabilités où, non seulement la terminologie est frappante, mais où encore le souci de toute une école est explicitement de nature concrète.

Enfin l'étude précédente met en évidence un des liens possibles entre une théorie et ses applications. La probabilité₁ est apparue en fin de compte comme une estimation de la probabilité₂. De plus, la possibilité même d'un tel passage laisse entendre que l'opposition entre les deux probabilités est davantage une vue commode de l'esprit qu'une vérité profonde. Une probabilité₂ n'est jamais brutalement donnée par les choses. Elle résulte d'un travail de l'esprit, elle comporte déjà une part de construction. Et inversement, une probabilité₁ n'est pas un concept tout à fait « vide ». Les axiomes qui lui donnent l'existence n'ont pas été choisis n'importe comment, mais le souci d'établir « un schéma » de la réalité, pour parler comme M. Gonsseth, a présidé à leur élection.

CHAPITRE X

CONCLUSIONS

1. *L'apparition du temps en mathématiques*

On a vu qu'il était possible de marquer à peu près le moment où le temps avait fait son apparition dans la pensée mathématique : abstraction faite d'Archimède, on peut dire qu'il commença de jouer un rôle en mathématiques au moment même où naissaient les sciences physiques, soit au début de la Renaissance. Jusqu'à cette époque la pensée mathématique était, en gros, dominée par le modèle des *Eléments* d'Euclide. Or ceux-ci, et la chose est d'importance pour nous, apparaissent fondamentalement statiques et atemporels. Cela signifie que les figures étudiées n'y deviennent pas ce qu'elles sont mais qu'elles y sont données, soit directement, soit indirectement à l'aide de constructions finies. De telles constructions ne sont d'ailleurs reconnues valables que si elles se ramènent aux seules droites et circonférences. Ces lignes, à leur tour, ne sont pas définies comme les trajectoires de points mobiles, mais comme des lieux géométriques. Enfin les démonstrations s'appuient sur la considération des figures égales et non sur les glissements et les rotations.

D'un autre côté ce caractère statique s'accompagne d'une complète indifférence quant aux applications possibles de la géométrie. Nous ne savons pas si Euclide s'est exprimé à ce sujet. Mais Euclide était platonicien d'opinion¹ et Platon, lui, a précisé en maints endroits de ses œuvres le rôle de la géométrie². La géométrie, selon lui, n'a aucunement à rendre compte des phénomènes sensibles. Elle ne doit pas non plus permettre ou faciliter les opérations matérielles. Cette sorte de souci est l'apanage des marchands et des arpenteurs. Le rôle de la géométrie est d'un autre ordre : il est essentiellement contemplatif et, à proprement parler, métaphysique. Son but est de préparer l'âme à la considération des vérités immuables, de l'exercer à sa plus haute fonction. Dans ces conditions, on comprend que la géométrie grecque, pour autant qu'elle fût d'inspiration platonicienne, ne se soit jamais appuyée sur ce qui naît et périt et même n'ait eu aucune raison d'en tenir compte.

¹ Selon Proclus.

² *République*, *Timée* par exemple.

Par contre les choses se sont posées tout autrement chaque fois que la géométrie, et plus généralement les mathématiques, se sont proposées comme tâche de fournir un modèle de la réalité concrète. C'est qu'une part importante leur en échappait tant qu'elles restaient purement statiques. Tout ce qui relevait de la variation, du changement, du mouvement, tout ce qui sur le plan de l'action quotidienne exigeait une coordination temporelle ne trouvait aucun équivalent dans cette sorte de mathématique. Ce fut sans doute un des mérites de Zénon d'avoir clairement montré qu'on ne créerait pas le mouvement avec le seul repos¹. D'ailleurs Archimède¹, c'est-à-dire l'Archimède platonicien fidèle à l'idéal d'Euclide, échoua dans ses tentatives de mathématiser le mouvement². Galilée à son tour, ne parvint pas à la loi de la chute des corps tant qu'il s'en tint à la géométrie traditionnelle³. Aussi nous estimons que ce n'est pas par hasard que l'analyse qui se constitua avec Archimède², avec Galilée, avec Newton, d'une part s'engagea sur la voie nouvelle des applications et simultanément songea à faire usage du temps. Il est remarquable en effet que les premiers analystes aient aussi été les premiers physiciens et que les problèmes qui donnèrent naissance au calcul différentiel fussent très directement issus de considérations matérielles : problème de la chute des graves, de la cycloïde, de la chaînette, etc.

Ainsi les mêmes nécessités qui s'étaient fait sentir sur le plan de l'action et du discours quotidiens se représentèrent au niveau des symboles mathématiques. L'existence d'un monde extérieur à la pensée, celle d'objets constituant ce monde ne faisaient pas de doute aux yeux des fondateurs de l'analyse. Dès lors le problème se posait de construire un modèle de ce monde, d'en abstraire un schéma qui, d'une part, en exprimerait les principales propriétés et qui, d'autre part, se soumettrait sans trop de peine à des règles simples. Si la géométrie telle déjà qu'Euclide l'avait établie permettait admirablement l'étude du comportement spatial des choses, aucune science adéquate n'autorisait l'étude de leurs propriétés temporelles. Il s'agissait donc de constituer, parallèlement à la géométrie, une « chronométrie », c'est-à-dire une science mathématique qui, étant donné certains éléments de grandeurs variables, permît d'en calculer les éléments inconnus. Il fallait parvenir à mathématiser les sciences de la nature et l'analyse nouvelle apparaît alors dans sa jeunesse, plus comme l'instrument du physicien que comme la construction désintéressée du mathématicien.

Cela a son importance pour nous. Le monde physique est construit sur un fond d'espace *et* de temps, ce qui fait que nous avons pu retrouver le temps en analyse dans les mêmes contextes qu'au niveau de l'action quotidienne : mouvement, ordre, action proprement dite⁴.

C'est ainsi que le temps fut d'abord, avec les Galilée et les Newton,

¹ Cf. II, 1.

² KOYRÉ, *Etudes Galiléennes*, Vol. III, p. 279.

³ *Ibid.*, Vol. II, p. 95.

⁴ Cf. I, 2.

le support même de la cinématique, la variable t de la mécanique. Toutes les courbes furent ensuite envisagées comme les trajectoires de points idéaux mais mobiles et la variable mathématique enfin a bénéficié de toute l'élaboration que les physiciens et les astronomes avaient déjà fait subir au temps de leurs sciences. Ayant ainsi pénétré dans l'édifice mathématique, le mouvement va s'y montrer admirablement riche de possibilités. C'est à lui que l'on doit le premier modèle suffisant à soutenir, et surtout à manipuler, l'idée de limite et par là celle d'infini. C'est au mouvement encore que l'on doit l'image d'une grandeur continue, suffisante pour tous les usages jusqu'à Dedekind et Cantor.

Mais ce n'est pas tout. Nous constatons aujourd'hui qu'une très grande partie des mathématiques, toute celle en tous cas qui dépend des nombres naturels, est tributaire d'une notion d'ordre. Cet ordre, ce fut d'abord le temps qui l'apporta et cela au point que le problème d'une définition de l'ordre ne surgit pas avant la théorie des ensembles. La variable, grandeur en devenir, ordonnait les valeurs qu'elle prenait au fur et à mesure qu'elle les parcourait.

Enfin, il est à peine besoin de revenir encore sur le lien entre le temps et l'action : cette « chronométrie », que fut l'analyse, étant née du souci d'agir plus efficacement sur les choses. Et n'avons-nous pas montré le calcul des probabilités recourir, aujourd'hui encore, à l'idée de temps chaque fois qu'il veut « mordre » sur la réalité ?

2. *L'élimination du temps*

Il est alors frappant de constater qu'à mesure que l'analyse infinitésimale obtenait quelque succès, le souci naissait de parvenir aux mêmes résultats sans le secours du temps, de telle sorte que le désir d'éliminer le temps apparaît simultanément à son introduction. Cet effort, poursuivi jusqu'à nos jours, a conduit à réduire complètement l'analyse à une théorie atemporelle en principe, celle des ensembles. La question se pose donc de comprendre pourquoi une technique qui réussissait, qui s'appuyait sur une notion aussi riche et aussi familière que celle de temps fut, avec un souci aussi constant, remplacée par d'autres atemporelles.

Les raisons nous en semblent multiples. Quelques-unes sont apparues au sein même des mathématiques, les autres sont liées au rapport que les mathématiques soutiennent avec la pensée en général. Commençons par rappeler les premières.

La science du temps, au sens où nous l'avons définie, ne se constitue en tant que science qu'en niant le temps. L'idée de variation en effet, prise en elle-même, est extraordinairement pauvre. Savoir qu'une grandeur varie n'est rien si on ne dit pas encore *comment* elle varie, si on ne donne pas la loi de sa variation. C'est pourquoi la théorie des fonctions est plus importante que la théorie des variables, c'est pourquoi on ne parle en fait de grandeurs variables que pour indiquer ce qui, en elles,

ne varie pas. Cette difficulté essentielle est apparue tout au long de notre travail. Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, le n^e terme d'une suite ne sauraient constituer un résultat tant que Δx ou que n varient encore. Mais s'ils ne varient plus, si $\Delta x = 10^{-10}$ par exemple, ou si $n = 10^{10}$, ils n'expriment plus alors exactement la dérivée ou la limite. Cette obligation d'être et de n'être pas dans le temps prend toute sa force avec cette interrogation de Bertrand que nous avons citée ¹ : « Comment donc oser parler des lois du hasard ? » Et on comprend que quelques-uns aient songé, pour « ne rien négliger ni ne rien faire évanouir » ², pour n'être pas tenus non plus à des valeurs toujours successives mais approximatives, à appuyer leurs raisonnements sur d'autres bases.

Il y a encore une autre question ou, pour mieux dire, une forme différente de la même question : celle de l'existence des objets mathématiques. On sait que les objets du monde extérieur déjà nécessitent pour exister une participation active de l'esprit. Encore prennent-ils comme prétexte une excitation sensorielle. Mais les êtres mathématiques, eux, sont les produits purs, ou presque, de l'activité de la pensée : ils sont construits par elle, toute leur existence vient d'elle. On comprend alors qu'au moment où l'infini s'est introduit dans l'édifice mathématique, les êtres qui exigeaient une construction qu'il était impossible par définition de conduire à terme, aient pu paraître incomplets et de valeur moindre. On saisit aussi qu'on ait songé à admettre que, comme ces autres qui au bout d'un nombre fini d'opérations existaient, ils existaient actuellement dans leur plénitude, dans l'au-delà d'un processus temporel.

Notons enfin que sur un point particulier au moins l'image du temps a pu paraître gênante en tant que telle. Ce fut au moment où les progrès de l'analyse ont amené à l'étude des fonctions discontinues. L'obligation de concevoir une grandeur variable qui, à certains instants, cessait d'exister, qui pouvait même, si elle était discontinue en tous ces points, n'exister jamais comme variable tout en existant comme fonction, ne pouvait manquer de conduire à se débarrasser du support temporel. Aussi bien avons-nous vu que la fonction s'était libérée du temps bien avant la variable ³.

Mais nous pensons qu'il y a encore un autre ordre de raisons qui ont pu conduire à situer les mathématiques en dehors du temps.

Il y a d'abord ce caractère particulier des mathématiques qui les faisait déboucher, selon Platon, sur l'immuable ⁴. Aujourd'hui encore il est bien difficile de n'être pas frappé par l'aspect universel des mathématiques, par le fait qu'elles expriment des lois valables ici et ailleurs, maintenant et toujours. Cette universalité n'aurait-elle pas comme conséquence une position extra-temporelle ? A cet égard, une analyse comme celle que fait A. Lalande dans *La raison et les normes* et qui le conduit à dégager

¹ Cf. Ch. X, 1.

² L'expression est de LAGRANGE, *Leçons sur le calcul des fonctions*, p. 326.

³ Cf. Ch. III, 2 et Ch. V, 1.

⁴ Cf. supra.

l'aspect normatif d'une raison constituante par opposition à une raison constituée, nous semble significative.

Mais il y a surtout la technique même de la démonstration qui, comme nous l'avons vu¹, est toujours tributaire d'une certaine logique. Sans doute celle-ci ne nous est-elle pas véritablement imposée. Et toutefois, les mathématiques classiques peuvent se caractériser par l'emploi exclusif qu'elles font d'une logique bivalente. On comprend que, dans un système de pensée où toute proposition reçue a soit la valeur V, soit la valeur F et nécessairement une de ces valeurs, il n'y ait pas de place pour le temps. La valeur de vérité de la proposition « a est la limite de x » ne saurait dépendre du moment où on envisage x pas plus quelle ne saurait être dite de plus en plus vraie à mesure que $|x - a|$ diminue.

Aucune des raisons ci-dessus ne se suffit peut-être à elle-même. Mais toutes se tiennent et leur ensemble nous paraît expliquer l'effort permanent que nous avons constaté pour éviter l'emploi du temps.

3. *L'élimination du temps est-elle totale ?*

Jusqu'à quel point cet effort est-il couronné de succès ? C'est ce qu'il reste à voir. Certes depuis que vers 1880 Dedekind parvint, par sa théorie des chaînes, à éviter l'usage du « etc. »², depuis surtout que Cantor, entre 1882 et 1884, passa au-delà du dénombrable³, le temps n'avait en droit plus de rôle à jouer au sein de l'analyse. Toutefois il semble subsister encore une certaine marge entre le droit et le fait.

Notons d'abord que l'usage du temps persiste dans la métalangue qui sert à exposer certaines règles du langage mathématique lui-même. Il semble très difficile d'exposer l'analyse sans utiliser jamais des expressions comme « d'abord ... ensuite », « successivement », « après », et autres semblables.

Mais il y a plus et c'est jusqu'à l'intérieur des mathématiques que le temps se montre souvent tout près de réapparaître. Rappelons par exemple que l'on est en présence de deux définitions principales de l'infini : celle de Dedekind qui s'appuie sur l'équivalence de l'ensemble avec une de ses parties propres et celle qui s'appuie sur ce qu'on peut nommer, avec Russel, le caractère non inductif de l'ensemble. Prises isolément et en elles-mêmes, ces deux définitions ne font aucun usage du temps. Et cependant on sait que leur équivalence ne peut se démontrer que par l'intermédiaire de l'axiome du choix, c'est-à-dire comme nous l'avons vu³, en postulant qu'il est possible de se passer du temps. S'il faut ainsi un axiome particulier pour nier le temps, et encore un axiome dont la portée et la valeur ont été si vivement discutées, on est en droit d'estimer que le temps a encore une forte tendance à intervenir au sein même de la théorie des ensembles.

¹ Cf. IX, 3.

² J. CAVAILLES, *Remarques sur la théorie des ensembles*.

³ Cf. IV, 3.

Il y a d'ailleurs un argument encore plus fort en faveur du temps. Il s'appuie sur l'existence des paradoxes découverts à la fin du siècle passé et dont quelques-uns en tous cas, les paradoxes ou antinomies logiques, sont dus à l'emploi inconditionné de totalités actuellement infinies. Aussi les axiomatiques de la théorie des ensembles ont-elles dû poser des restrictions à leur emploi.

Parmi les procédés proposés nous signalerons seulement celui de Russel qui offre la particularité de revenir, en un certain sens, à l'emploi du temps.

En effet, la théorie des types s'interdit de considérer tous les ensembles possibles comme préexistants. Partant d'un premier type, elle construit les autres successivement et à aucun moment elle ne parle de tous les types. Cela ne signifie pas sans doute que les *Principia* représentent une construction temporelle de l'analyse. Aucune des propositions énoncées axiomatiquement ne contient un symbole de devenir. Et cependant leur interprétation, elle, exige l'idée de temps. Toute proposition, en effet, peut, sous certaines conditions de cohérence, être considérée comme valable dans un certain type, puis dans le suivant, puis dans le suivant, et ainsi de suite. Elle est donc valable pour chacun des types successivement sans qu'on puisse en conclure qu'elle l'est pour tous simultanément.

De tels faits autorisent, nous semble-t-il, à conclure que si l'analyse classique, en tant qu'elle est une construction mathématique faite par des mathématiciens et pour eux, évite autant que possible l'usage du temps, celui-ci toutefois n'est jamais très loin et même continue parfois à se montrer utile.

4. Conclusions

On se souvient comment Meyerson, par de multiples exemples tirés des sciences physiques, avait fait voir le soin constant que l'homme de science mettait à éliminer le temps¹. Il montrait que des principes de conservation, comme celui de l'énergie par exemple, non seulement n'étaient guère soutenus par l'expérience, mais qu'en quelque sorte ils allaient contre elle. Il en concluait à l'existence de fortes raisons pour agir ainsi et il a pensé trouver dans le temps un irrationnel suffisant pour justifier partout son exclusion sans condition. Le temps était en somme l'expression de la zone imperméable que les choses offraient à l'esprit.

A la suite des analyses que nous venons de faire du rôle joué par le temps en mathématiques, nous estimons que les conclusions de Meyerson sont trop absolues ou, plus précisément, qu'il n'a pas toujours pris soin de poser tous les termes du problème.

Si nous avons pu constater, en effet, en analyse mathématique un souci très net d'éliminer le temps, nous avons pu préalablement marquer

¹ *Identité et réalité ; De l'explication dans les sciences ; Essais.*

les moments et les circonstances de son introduction. Il ne s'est pas offert à nous comme le résultat de la malignité des choses, mais comme un moyen volontairement utilisé par le savant. Il est vrai qu'il représente, par rapport à la construction préexistante dans laquelle il entre, un élément moins précis et surtout moins formalisé. Mais c'est que son rôle, sa raison d'intervenir, sont précisément d'élargir des cadres momentanément trop étroits, et il a à son actif d'avoir permis à plusieurs reprises la continuation de la pensée mathématique.

Il nous semble donc que l'aspect « irrationnel » du temps ne doit pas s'entendre en un sens absolu. Il ne saurait y avoir, pensons-nous, de notions « rationnelles » ou « irrationnelles » que relativement aux moyens d'expression de la raison. Or celle-ci s'exprime toujours au travers d'un certain système logique L. De sorte qu'il nous paraît préférable de dire que, si L est la logique classique bivalente, alors le temps apparaît comme L-non signifiant. Cela atténue l'accusation d'irrationalité, tout en laissant subsister ce caractère de dépassement par rapport à L. Cela tient compte enfin de la L-exigence de son élimination, malgré les services rendus.

Si ces vues sont exactes, la possibilité subsisterait donc de construire des systèmes logiques dans lesquels figurerait, à côté ou à la place des foncteurs « et » et « ou » une relation « puis ». Alors, dans une pensée qui s'exprimerait à l'aide de telles logiques les images temporelles pourraient servir peut-être à construire des modèles tout aussi adéquats que les images spatiales le sont pour la logique classique.

APPENDICE

LISTE

des principaux mots temporels utilisés en analyse

La liste suivante n'a aucun caractère exhaustif. Elle sert avant tout à illustrer la méthode dont nous nous sommes implicitement servi. D'autre part elle ne saurait, comme nous l'avons relevé, s'utiliser automatiquement. Dans chaque cas, la plus extrême attention est nécessaire pour s'assurer du sens que l'auteur entend donner à sa phrase¹.

APPROCHER

On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée... sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche. D'Alembert, *Encyclopédie*, art. Limite.

Grippeminaud leur dit : Mes enfants, approchez, approchez. La Fontaine, *Fables*, VII, 16.

ATTEINDRE

Nous appelons limite d'une variable, une quantité constante dont la variable approche indéfiniment sans jamais l'atteindre. Duhamel, *Eléments*, p. 9.

Vous n'avez pas encore atteint l'âge où je cours. Racine, *Phèdre*, III, 5.

AUGMENTER

Je supposerai qu'une des quantités proposées... doit augmenter par une fluxion uniforme. Newton, *Méthode des fluxions*, no. LIX.

Tâchez d'augmenter tous les jours ces pieuses inquiétudes. Bossuet, *Panég. sainte Thérèse*.

CHANGER

On appelle quantité variable en Géométrie les quantités qui varient suivant une loi quelconque... On les appelle ainsi par opposition aux quantités... qui ne changent point. D'Alembert, *Encyclopédie*, art. Variable.

On change avec le temps, d'âme, d'yeux et de cœur. Corneille, *Agés.*, V, 8.

¹ Les textes littéraires sont tirés de Littré.

CONTINUELLEMENT

Il n'est pas nécessaire de démontrer que le rapport $\sin x : x$ va en augmentant continuellement quand x , plus petit que un quadrant, diminue indéfiniment. Sturm, Cours, p. 4.

Laissez parler et continuez d'agir. La Bruyère, dans Girault-Duvivier.

CROITRE

Je considère ici ces quantités comme variables et croissant ou décroissant comme par un mouvement ou flux perpétuel. Newton, Principes, Lemme II.

Vos impostures croissent tous les jours. Pascal, Prov., 15.

D'AVANCE

On dit qu'un nombre variable x est infiniment grand positif quand, dans sa variation, il finit par devenir et demeurer supérieur à tout nombre donné d'avance. Denjoy, Grande Encyclopédie, T. I, 3e partie, Section B.

Bénissez par avance la sagesse miséricordieuse de celui qui saura tirer de vos passions un nouvel avantage pour sa gloire. Massillon, Car. Lazare.

DÉCRIRE

La loi qui s'observe dans la description des lignes par le mouvement. Lacroix, Traité, p. XXV.

[Littré renvoie à « Tracer ».] Le blé... N'attendait point qu'un bœuf pressé de l'aiguillon Traçât à pas tardifs un pénible sillon. Boileau, Epit. III.

DEVENIR

Lorsqu'une quantité variable prend des valeurs de plus en plus petites, de manière qu'elle puisse devenir moindre que toute quantité donnée, on dit qu'elle devient infiniment petite. Sturm, Cours, p. 6.

Si vous êtes né vicieux, ô Théagène, je vous plains ; si vous le devenez par faiblesse... souffrez que je vous méprise. La Bruyère, IX.

DIMINUER

On diminue indéfiniment la quantité o et on néglige les termes qui s'évanouissent. Newton, Tractatus, p. 9.

Mon esprit diminue, au lieu qu'à chaque instant On aperçoit le vôtre aller en augmentant. La Fontaine, Fables, XII, 1.

ENGENDRER

Toute courbe plane peut être engendrée (*procreari*) par le mouvement parallèle d'une ligne droite et d'un point sur celle-ci. Barrow, *Lectonibus geometricis*, III.

L'abondance augmentait les forces et engendrait les divisions. D'Ablancourt, Tacite, liv. I, ch. 1.

EVANOUIR

On peut dire, contre ce principe des premières et dernières raisons, que les quantités qui s'évanouissent n'ont point de dernière proportion entre elles ; parce que, avant de s'évanouir, la proportion qu'elles ont n'est pas la dernière, et lorsqu'elles se sont évanouies, elles n'en ont plus aucune. Newton, Principes, p. 47.

Qui croit les posséder [ces douceurs] les sent s'évanouir. Corneille, Héracl., I, 1.

FINIR

On dit qu'un nombre variable x a pour limite un nombre fixe a , ..., lorsque la valeur absolue de la différence $x - a$ finit par devenir et rester plus petite que tout nombre positif donné à l'avance. Coursat, Cours, p. 1.

Je vous embrasse du fond de mon trou, avec une tendresse qui ne finira qu'avec moi, mais qui finira bientôt. Voltaire, Lettre à d'Argental, 14 octobre 1767.

INDÉFINIMENT

A partir de ce dernier dividende partiel, qui a déjà été obtenu, il est clair que les opérations vont se reproduire exactement comme elles se sont produites à partir du moment où on a obtenu une première fois ce dividende partiel, c'est-à-dire qu'on retrouvera dans le même ordre les dividendes partiels... et ainsi de suite indéfiniment. Tannery, Arithmétique, p. 213.

Les grands anatomistes se trompaient quand ils pensaient que les filets nerveux sont eux-mêmes composés de filets plus petits, ceux-ci de plus petits encore, et ainsi à l'indéfini. Bonnet, Paling. philos., X, 15, note 9.

MOUVOIR

Lorsqu'une droite... tourne uniformément dans un plan... et que, sur la droite en rotation, un point se meut uniformément... le point décrira une spirale dans le plan. Archimède, Oeuvres, p. 478.

Tout se passe, se suit, se succède, se renouvelle et se meut par une puissance irrésistible. Buffon, Quadrup., T. I, p. 5.

PASSER

Une variable est continue lorsqu'elle ne peut passer d'une valeur quelconque à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Duhamel, Eléments, p. 222.

Je suis passée courageusement de Bretagne en Provence. Sévigné, 13 novembre 1690.

PENDANT

Si dans un système quelconque, l'on considère deux quantités infiniment petites d'ordres différents, pendant que ces deux quantités s'approchent indéfiniment de zéro, celle qui sera d'un ordre plus élevé finira par obtenir constamment la plus petite valeur numérique. Cauchy, Leçons, pp. 12-13.

Il faut bien que tout ce qui agit sur les animaux et sur les végétaux, agisse pendant que la lune marche. Voltaire, Dictionnaire philosophique, Influence.

PRÉCÉDER

Soit x une variable réelle qui passe successivement par une infinité de valeurs... de telle sorte... qu'on puisse distinguer les valeurs qui précèdent de celles qui suivent. La Vallée Poussin, Cours, p. 11.

Je précède mon maître de quelques moments, il me suit. Pont de Veyle, Somb. sc. 8.

PUIS

Nous appellerons suite croissante de nombres cardinaux la suite des nombres qui comprennent respectivement une unité, puis deux unités, puis trois unités, etc. P. Boutroux, Principes, T. I, p. 3.

Au vôtre [nom] elle a rougi, puis s'est mise à sourire. Corneille, Othon, I, 3.

RÉPÉTER

Dans une série d'épreuves répétées identiques, la fréquence d'un événement déterminé A tend vers la probabilité de cet événement... lorsque le nombre des épreuves augmente indéfiniment. Hadamard, Cours, T. II, p. 583.

La nature... ne paraît avoir répété aucune de ses formes dans l'autre continent, mais les avoir faites sur des modèles tout neufs. Buffon, Oiseaux, T. XIII, p. 275.

RESTER

On dit que le nombre variable x a pour limite le nombre fixe a ..., lorsque x devient et reste aussi voisin de a qu'on le veut. Leconte et Deltheil, *Eléments* T. I, p. 18.

Napoléon ne se décide encore ni à rester ni à partir. Ségur, *Hist. de Napol.*, VIII, 11.

SUCCESSIF

On appelle série une suite indéfinie de quantités... formées suivant une loi, que l'on ajoute successivement les unes aux autres. La Vallée Poussin, *Cours*, p. 406.

Leurs années [des hommes] se poussent successivement comme des flots. Bossuet, *Duchesse d'Orléans*.

TENDRE

Si deux quantités qui varient simultanément restent constamment égales entre elles, dans tous les états de grandeur par lesquels elles passent, et si l'on sait que l'une d'elles tend vers une limite, il est évident que l'autre tend aussi vers la même limite. Sturm, *Cours*, p. 5.

C'étaient de toutes parts des bruits confus de gens... qui couraient sans savoir où tendaient leurs pas. Fénelon, *Tél.* I.

VARIER

Deux quantités algébriques variables sont dites fonctions l'une de l'autre, quand elles varient simultanément, de telle sorte que la valeur de l'une détermine la valeur de l'autre. Cauchy, *Exercices*, T. III, p. 308.

Une société choisie... y venait successivement varier mes loisirs. Marmontel, *Mém.* XI.

BIBLIOGRAPHIE

des ouvrages cités

- D'ALEMBERT J.*, Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. Berne et Lausanne, 1780.
- APPELL P. ET DAUTHEVILLE S.*, Précis de mécanique rationnelle. 3e éd. Paris, Gauthier-Villars, 1923.
- ARCHIMÈDE*, Oeuvres complètes. Trad. Ver Eecke. Paris et Bruxelles, Desclée de Brouwer, 1921.
- ARISTOTE*, Physique. Trad. Barthélémy Saint-Hilaire. Paris, 1862.
- Physique. Trad. Carteron. 2 vol. Paris, Ed. des Belles-Lettres, 1926.
- BERGSON H.*, L'évolution créatrice. 19e éd. Paris, 1916.
- Durée et simultanéité à propos de la théorie d'Einstein. 2e éd. Paris, Alcan, 1923.
- Essai sur les données immédiates de la conscience. Paris, Presses universitaires de France, 1940.
- BERKELEY G.*, The works of George Berkeley. Vol. III : The Analyst. Oxford, Clarendon Press, 1901.
- BERNOULLI J.*, Jacobi Bernoulli basileensis Opera. 2 vol. Genova, 1764.
- BERTRAND J.*, Calcul des probabilités. 2e éd. Paris, Gauthier-Villars, 1907.
- BETH E. W.*, Les fondements logiques des mathématiques. Paris et Louvain, Gauthier-Villars et Nauwelaerts, 1950.
- BOREL E.*, Leçons sur la théorie des fonctions. 2e éd. Paris, 1914.
- Les paradoxes de l'infini. Paris, Gallimard, 1946.
- BOURBAKI N.*, Eléments de mathématiques. Paris, Hermann, 1939-1942.
- Foundations of mathematics for working mathematician. Journal of symbolic logic. Vol. 14, No. 1, March 1949.
- BOUTROUX P.*, Les principes de l'analyse mathématique : exposé historique et critique. 2 vol. Paris, Hermann, 1914-1919.
- BRÉHIER E.*, Histoire de la philosophie. 7 vol. Paris, Presses Universitaires de France, 1945-1946.
- BRUNSCHVIG L.*, Les étapes de la philosophie mathématique. 2e éd. Paris, Alcan, 1922.
- BURNET J.*, L'aurore de la philosophie grecque. Trad. Aug. Reymond. Paris, Payot, 1919.

- CANTOR M., *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*. Halle, H. W. Schmidt, 1863.
- CARNAP R., *The nature and application of inductive logic*. Chicago, University Press, 1951.
- CARNOT L., *Réflexion sur la métaphysique du calcul infinitésimal*. 2e éd. Paris, Vve Courcier, 1813.
- COURNOT A., *Essai sur les fondements de nos connaissances*. Paris, Hachette, 1912.
- COUTURAT L., *Les principes des mathématiques*. Paris, Alcan, 1905.
- CAUCHY A. L., *Leçons sur le calcul différentiel*. Paris, De Bure Frères, 1829.
— *Exercices d'analyse et de physique mathématique*. 4 vol. Paris, Bachelier, 1840-1847.
- CAVAILLÈS J., *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*. Paris, 1938.
- DAUZAT A., *Grammaire raisonnée de la langue française*. Lyon, 1948.
- DAVAL R. ET GUILBAUD G. T., *Le raisonnement mathématique*. Paris, Presses universitaires de France, 1945.
- DENJOY A., *Les fonctions de variables réelles*. Encyclopédie française, T. I, 3e partie, Section B.
- DESCARTES R., *Oeuvres*. Publ. par V. Cousin. T. V : *Géométrie*. Paris, Levrault, 1824.
— *Oeuvres*. Publ. par Adam et Tannery. *Correspondance*. Paris, Cerf, 1897.
— *Correspondance*. Publ. par Adam et Milhaud. 2 vol. Paris, Alcan, 1936-1939.
— *Oeuvres*. 2 vol. Paris, Librairie Gibert, 1940.
- DESTOUCHES-FÉVRIER P., *Manifestations de la complémentarité*. *Dialectica*, 7/8, 15.8-15.11, 1948.
- DU BOIS REYMOND P., *Théorie générale des fonctions*. Trad. Milhaud et Girot. Première partie. Nice, 1887.
- DUBREIL P., *Algèbre*. T. I. Paris, Gauthier-Villars, 1946.
- DUHAMEL M., *Éléments de calcul infinitésimal*. T. I. Paris, Bachelier, 1856.
- DU PASQUIER L. G., *Le calcul des probabilités*. Paris, Hermann, 1926.
- ENRIQUES F., *L'évolution des idées géométriques dans la pensée grecque*. Paris, Gauthier-Villars, 1927.
- EUCLIDE, *Euclidis elementorum libri XV*. Parisiis, Apud Viduam Guilielmi, 1598.
- EULER L., *Opera mathematica*. Vol. VIII, IX : *Introductio in analysin infinitorum*. Vol. X : *Institutiones calculi differentialis*. Leipzig, Teubner, 1913, 1922, 1945.
- FERMAT P., *Oeuvres de Fermat*. Ed. Tannery et Henry. T. I. Paris, Gauthier-Villars, 1841.
- FISHER A., *The mathematical theory of probabilities*. Transl. Dickson and Bonyng. Vol. I. Sec. ed. New-York, Macmillan, 1923.
- FRAENKEL A., *Einleitung in die Mengenlehre*. Zweite Auflage. Berlin, Julius Springer, 1923.
- GAUSS C. F., *Werke*. T. VIII. Leipzig, Teubner, 1900.
- GERHARDT C. I., *Die Entdeckung der höheren Analysis*. Halle, 1855.
- GINI C., *Concept et mesure de la probabilité*. *Dialectica*, 9/10, 15.3-15.6, 1949.
- GONSETH F., *Les fondements des mathématiques*. Paris, Blanchard, 1926.
— *La géométrie et le problème de l'espace*. 4 fasc. Neuchâtel, Griffon, 1945-1949.
- GOURSAT E., *Cours d'analyse mathématique*. T. I. 3e éd. Paris, Gauthier-Villars, 1917.
- GUYAU M., *La genèse de l'idée de temps*. 2e éd. Paris, Alcan, 1902.
- HAAG J., *Cours complet de mathématiques spéciales*. T. I : *Algèbre et analyse*. 3e éd. Paris, Gauthier-Villars, 1940.

- HADAMARD J., Cours d'analyse de l'école polytechnique. 2 vol. Paris, Hermann, 1927-1930.
- HAMILTON W. R., Lectures on quaternions. Dublin, Hodger and Smith, 1853.
- DE LA HARPE J., De l'ordre et du hasard. Neuchâtel, Mémoires de l'Université, 1936.
- Genèse et mesure du temps. Neuchâtel, Mémoires de l'Université, 1941.
- VON HELMHOLTZ H., Wissenschaftliche Abhandlungen von Hermann von Helmholtz. Dritter Band. Leipzig, 1895.
- HILBERT D. UND ACKERMANN W., Grundzüge der theoretischen Logik. Dritte Auflage. Berlin, Julius Springer, 1949.
- HUSSERL E. G., Philosophie der Arithmetik. Erster Band. Halle, 1891.
- JANET P., L'évolution de la mémoire et de la notion du temps. Paris, A. Chahine, 1928.
- JEANS J., Les nouvelles bases philosophiques de la science. Trad. Lalande. Paris, Hermann, 1935.
- KANT E., Critique de la raison pure. Trad. Barni. 2 vol. Paris, Flammarion, 1934.
- KEYNES J. M., Über Wahrscheinlichkeit. Leipzig, A. Barth, 1926.
- KOYRÉ A., Etudes galiléennes. 3 fasc. Paris, Hermann, 1939.
- LACROIX S. F., Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. T. I. Paris, 1810.
- LAGRANGE J. L., Leçons sur le calcul des fonctions. Paris, Courcier, 1806.
- LALANDE A., Vocabulaire technique et critique de la philosophie. 5e éd. Paris, Presses universitaires de France, 1947.
- La raison et les normes. Paris, Hachette, 1948.
- LANDAU E., Grundlagen der Analysis. New-York, Chelsea, 1946.
- LAPLACE P. S., Essai philosophique sur les probabilités. 2e éd. Paris, 1814.
- LECONTE TH. ET DELTHEIL R., Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral. 2 vol. 6e éd. Paris, Colin, 1941.
- LEIBNIZ G. W., Leibnizens mathematische Schriften herausgegeben von G. I. Gerhardt. Halle, 1858-1863. Band I: Dissertatio de arte combinatoria. De Quadratura arithmetica Circuli, Ellipseos et Hyperbolae. Analysis infinitorum. Band III: Initia mathematica. Mathesis universalis.
- Opuscules et fragments inédits. Publ. par Couturat. Paris, Alcan, 1903.
- MANNOURY G., Les fondements psycho-linguistiques des mathématiques. Neuchâtel, Griffon, 1947.
- MARIE M., Histoire des sciences mathématiques et physiques. T. IV et T. VI. Paris, Gauthier-Villars, 1884-1885.
- MEYERSON E., De l'explication dans les sciences. 2 vol. Paris, Payot, 1921.
- Identité et réalité. 4e éd. Paris, Alcan, 1932.
- Essais. Paris, Vrin, 1936.
- MILHAUD G., Les philosophes géomètres de la Grèce. Paris, Alcan, 1900.
- VON MISES R., Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik. I. Band: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig, Deuticke, 1931.
- NEWTON I., commercium epistolicum. Promota: Jussu Societatis regiae in lucem editum. Londini, Anno MDCCXII.
- La méthode des fluxions et des suites infinies. Paris, 1740.
- Principes mathématiques de la philosophie naturelle. Trad. Mme du Chastellet. 2 vol. Paris, 1759.
- Tractatus de Quadratura curvarum. Upsaliae, 1762.
- OSIEKA H., Der Raum und Zeitbegriff bei Newton. Thèse, 1934.
- PIAGET J., La construction du réel chez l'enfant. Neuchâtel et Paris, Delachaux, 1937.
- Le développement de la notion de temps chez l'enfant. Paris, Presses universitaires de France, 1946.

- *La psychologie de l'intelligence*. Paris, Colin, 1947.
- *Traité de logique*. Paris, Colin, 1949.
- *Introduction à l'épistémologie génétique*. 3 vol. Paris, Presses universitaires de France, 1950.
- PIAGET J. ET SZEMINSKA A., *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neuchâtel et Paris, Delachaux, 1941.
- PLATON, *Oeuvres*. Trad. V. Cousin. T. 9, 10, 12. Paris, 1839.
- POINCARÉ H., *Sur la nature du raisonnement mathématique*. *Revue de métaphysique et morale*. Juil. 1894.
- *La science et l'hypothèse*. Paris, Flammarion, 1914.
- POIRIER R., *Le nombre*. Paris, Alcan, 1938.
- QUINE W. V., *Mathematical logic*. Second printing. Harvard University Press, 1947.
- REY A., *La science dans l'antiquité*. 5 vol. T. I : *La science orientale avant les Grecs*. T. II : *La jeunesse de la science grecque*. T. III : *La maturité de la pensée scientifique en Grèce*. T. IV : *L'apogée de la science technique grecque*. T. V : *L'essor de la mathématique*.
- REYMOND A., *Logique et mathématique*. Saint-Blaise, 1908.
- *Histoire des sciences exactes et naturelles dans l'Antiquité gréco-latine*. Paris, Blanchard, 1924.
- RUSSEL B., *Méthode scientifique en philosophie*. Trad. Devaux. Paris, Vrin, 1929.
- *Introduction à la philosophie mathématique*. Trad. Moreau. Paris, Payot, 1952.
- SIERPINSKI W., *Leçons sur les nombres transfinis*. Paris, Gauthier-Villars, 1928.
- SIVADJIAN J., *Le temps*. Etude philosophique, physiologique et psychologique. 6 fasc. Paris, Hermann, 1938.
- SOURIAU M., *Le temps*. Paris, Alcan, 1937.
- SPINOZA B., *Oeuvres de Spinoza*. Trad. Appuhn. 3 vol. Paris, Garnier, 1928-1929.
- STURM CH., *Cours d'analyse de l'école polytechnique*. 2 vol. 8e éd. Paris, Gauthier-Villars, 1884.
- TANNERY J., *Leçons d'arithmétique théorique et pratique*. Paris, Colin, 1894.
- *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. T. I. 2e éd. Paris, Hermann, 1904.
- TANNERY P., *La géométrie grecque*. Première partie. Paris, Gauthier-Villars, 1887.
- VALIRON G., *Théorie des fonctions*. Paris, Masson, 1942.
- DE LA VALLÉE POUSSIN CH., *Cours d'analyse infinitésimale*. T. I. 8e éd. Gauthier-Villars, 1938.
- VAN DER WAERDEN B. L., *Moderne Algebra*. Zweite Auflage. Berlin, Julius Springer, 1937.
- WAHL J., *Du rôle de l'instant dans la philosophie de Descartes*. Paris, Alcan, 1920.
- WEBER H., *Encyklopädie der Elementaren Algebra und Analysis*. Dritte Auflage. Leipzig, Teubner, 1909.
- WHITEHEAD A. N. AND RUSSELL B., *Principia mathematica*. 3 vol. Cambridge, University Press, 1910-1913.
- WIENER N., *A contribution to the theory of Relative position*. *Proceedings of the Cambridge philosophical Society*, XVII, 5. (1914).
- VON WRIGHT G. H., *A treatise on induction and probability*. London, Routledge and Kegan Paul, 1951.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre premier : INTRODUCTION

1. Exemple liminaire	9
2. Sens du mot « temps »	11
3. Méthode de travail	15
4. Plan de l'ouvrage	16
5. Matériel utilisé	18

Chapitre II : L'IDÉE DE MOUVEMENT DANS LES DÉBUTS DE L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

1. La géométrie grecque et les paradoxes de Zénon . .	19
2. La méthode mécanique d'Archimède	20
3. Le calcul des fluxions	22
Conclusions	24

Chapitre III : LA LIMITE

1. Limite d'une variable	25
2. Limite d'une fonction	27
3. La continuité	28
Conclusions	31

Chapitre IV : L'INFINI

1. Infini potentiel et infini actuel	32
2. Ensembles finis et infinis	36
3. L'axiome du choix	37
Conclusions	38

<i>Chapitre V :</i>	VARIABLE, LIMITE ET CONTINUITÉ AU POINT DE VUE DE LA THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES EN- SEMBLES	
	1. La variable	40
	2. Les limites	42
	3. La continuité	45
	Conclusions	47
<i>Chapitre VI :</i>	LA NOTION D'ORDRE	
	1. Importance de l'idée d'ordre	48
	2. L'ordre temporel	51
	3. L'ordre mathématique	54
	Conclusions	56
<i>Chapitre VII :</i>	LES GÉNÉRALISATIONS DU NOMBRE	
	1. Les nombres rationnels	58
	2. Les nombres irrationnels	60
	3. Les nombres complexes	64
	Conclusions	65
<i>Chapitre VIII :</i>	LES NOMBRES NATURELS	
	1. Théorie ordinale	67
	2. Théorie cardinale	71
	3. Le raisonnement par récurrence	73
	Conclusions	76
<i>Chapitre IX :</i>	LE TEMPS ET LE CALCUL DES PROBABILITÉS	
	1. Le dualisme du calcul des probabilités	78
	2. Le rôle et l'élimination du temps	81
	3. Remarques sur l'induction	85
	Conclusions	87
<i>Chapitre X :</i>	CONCLUSIONS	
	1. L'apparition du temps en mathématiques	89
	2. L'élimination du temps	91
	3. L'élimination du temps est-elle totale ?	93
	Conclusions	94
<i>Appendice :</i>	Liste des principaux mots temporels utilisés en analyse	97
	Bibliographie des ouvrages cités	101

ACHEVÉ D'IMPRIMER A NEUCHÂTEL
SUR LES PRESSES
DE L'IMPRIMERIE NOUVELLE L.-A. MONNIER
LE 18 JANVIER 1955

